数学史上的里程碑

美) 日《伊夫斯·若

欧阳雄 蘇中語

基型征 光温林

北京科学技术出版社

数学史上的里程碑

[美] H·伊夫斯 著

欧阳绛 戴中器 赵卫江 张鸿林



北京科学技术出版社

Howard Eves GREAT MOMENTS IN MATHEMATICS

The Mathematical Association of America, 1983

数学史上的里程碑

(美)H•伊夫斯 著

欧阳绛 戴中器 译赵卫江 张鸿林

*

北京科学技术出版社出版

(北京西直门南顺城街12号)

新华书店首都发行所发行 各地新华书店经售 一二〇一工厂印刷

*

850×1168毫米 32开本 14.125印张 360千字 1990年10月第一版 1990年10月第一次印刷 印数1-3000册

ISBN7-5304-0651-5/T·135 定价: 6.60元

0 11 B

1357272

内容简介

本书以丰富的史料,通俗浅显的文字介绍了数学史上 43 个重要的转 折(包括无理量的发现,概率论的创立,爱尔兰根纲领等),使读者面前呈现出数学发展的一条清晰脉络。本书对立志于学好数学的学生以及欲 提 高数 学数学水平的教师很有参考价值,将有助于他们理解数学的全貌。

本书可作为教育学院、师范院校和综合性大学数学系的数学史教材,也可供中学数学教师、中学生及广大科技工作者参考。

22/1/-

译者序

科学技术发展得异常迅速,科学技术的社会功能也日益显著,简直使这个世界有了翻天覆地的变化.在这中间,数学起了卓越的作用.每一位关心现代化、关心社会前景的人都想懂点数学,每一位愿献身于四化建设的青年人都想学点数学,也就成了理所当然的事.

数学为什么渗透力那么强,以致于成了赞斯学科?数学仅仅是一门演绎学科,还是有什么别的奥妙?说数学能锻炼人的思维能力,到底是怎么回事?数学使那么多人着了迷,原因在哪里?——这一连串的问题常常萦回于我们的脑际.作者 II·伊夫斯展现了一幅生动活泼的历史酒面,让我们到画面上去找答案.因为历史上的事都曾经成为现实,其成为现实总有它成为现实的理由,这理由是最能说股人的.

作者的讲述颇具特色,首先,他没有把人类社会发展的不同 阶段强加给数学,而是介绍数学本身发展的重大转折,也就是我 们说的"里程碑".把数学发展比作链条的话,作者的着眼点就在 其各个环节上.其次,科学发展的道路是不平坦的,数学家们走 过的路是布满荆棘的.作者通过精心设计为题,让读者自己走 一走历代数学家走过的路.因为只有这样才能看到历史的 一走历代数学家走过的路.因为只有这样才能看到历史的 一走历代数学家走过的路.因为只有这样才能看到历史面 目,只有这样才的产生真正的"历史感".第三,作者还通过一些 数学游戏以及对从猜想到定理的全过程的详尽描述,向我们揭示 了数学的十分有趣的侧面.数学原本就是一门有趣的学问.

整个科学技术好比是一座风景秀丽的花园城市, 数学楼就处于这座城市的屋脊. 作者 H. 伊夫斯年逾七十, 步履还是那样矫健, 为我们提供了很好的导游, 我们十分感谢. 正因为如此, 我

们把原作者的这本书原原本本地奉融给读者. 但愿我们的"解说词"能为您的"旅游"增添几分愉快.

本书是由欧阳绛、戴中器、赵卫江和张鸿林四位 同志 翻译的,其中第1讲至第14讲、第16、17讲和第19、20讲由张鸿林译;第15、18讲由赵卫江译;第21至25讲由戴中器译,第26至40讲由欧阳绛译.限于译者水平,不当之处在所难免,盼读者不吝指正.

译 者

目 录

第一部分 1650年以前

第	1 讲	刻痕与咕噜声
	1.	根据一一对应原理进行计数(几百万年前)
第	2 讲	伟大的埃及金字塔 7
	2.	截方锥的体积计算(约公元前1850年)
第	3 讲	从实验室到书斋15
	3.	在数学中开始采用演绎法(约公元前600年)
第	4 讲	第一个重要定理 ······24
	4.	毕达哥拉斯定理(约公元前540年)
第	5 讲	第一次危机的降临38
	5.	无理量的发现(约公元前540年)
第	6 讲	第一次危机的消除47
	6.	欧多克斯的比例理论(约公元前370年)
第	7 讲	数学条理化的第一步55
	7.	实质公理体系(约公元前330年)
第	8 讲	数学家的圣经62
	8.	欧几里得的《原本》(约公元前300年)
第	9 讲	思想家和暴徒74
	9.	阿基米德论球体(约公元前240年)
第	10 讲	来自天文学的动力84
	10.	托勒密编制弦表(约公元130年)
第	11 讲	第一个伟大的数论学家96
	11.	丢番图和他的《算术》(约公元250年)

第	12 讲	代数学的简写 ·····110
		向着代数学迈进的最初几步(约公元250年)
第	13 讲	计算方面早期的两项发现119
	13.	算盘(时代未定,但很早)
	14.	印度-阿拉伯数系(公元800年前)
第	14 讲	霍拉桑的诗人数学家130
		奥马尔·海牙姆的三次方程的几何解法(1090年)
第	15 讲	大智若愚141
		斐波那契和他的《算盘书》(1202年)
第	16 讲	一个离奇的故事151
	17.	三次方程的代数解法(1554年)
		四次方程的代数解法(1554年)
第	17 讲	使天文学家的寿命增加一倍160
		耐普尔发明对数(1614年)
第	18讲	科学的激发171
	20.	伽利略和动力学(1589年前后)
	21.	• ·• · · · · · · · · · · · · · · · · ·
第	19 讲	无限分割182
		卡瓦列利的不可分量法(1635年)
第	20 讲	变换求解反演法189
		解析几何的发明(1637年)
部	分习是	更的解法提示201
		第二部分 1650年以后
第		无序中的有序228
		概率论的诞生(1654年)
第		动画与静画237
		微分学的发明(1629—1690)
第	23 讲	好象开门和关门252

	26.	微积分基本定理(16691700)
第	24 讲	幂级数262
	27.	泰勒级数与马克劳林级数(1715, 1742)
第	25 讲	Yea + Yea + Yea + Yea272
	28.	傅里叶级数(1807)
第	26 讲	几何学的解放(一)282
	29.	非欧几何的发现(1829)
第	27 讲	几何学的解放(二)293
	29.	非欧几何的发现(续)(1829)
第	28 讲	代数学的解放(一)304
	30.	非交换代数的发现(1843)
第	29 讲	代数学的解放(二)312
	30.	非交换代数的发现(续)(1843)
第	30 讲	一种重要的基本结构323
	31.	群结构(1830-1860)
第	31 讲	集几何之大成331
	32.	爱尔兰根纲领(1872)
第	32 讲	毕达哥拉斯是对的342
	33.	分析学的算术化,作为数学基础的自然数系
		(十九世纪末)
第	33 讲	再挖深些354
	34.	作为数学基础的集合论(十九世纪末)
	3 5.	抽象空间(1906)
	36.	由集合论改进的函数的概念(二十世纪初)
第	34 讲	有限之外365
	37.	超限数(1874-1895)
第	35 讲	一些重要的定义378
	38.	形式公理体系(二十世纪早期)
	39.	数学的定义(二十世纪早期)

第	36 讲	一些阐述清楚的例子384
	39.	数学的定义(续)(二十世纪早期)
第	37 讲	第三个层次391
	40.	元数学(1899-1920)
第	38 讲	数学,作为神学的一个分支400
	41.	哥德尔不完全性定理(1931)
第	39 讲	实现了的梦407
	42.	现代电子计算机(1944)
	43.	四色猜想的解决(1976)
第	40 讲	抱歉和遗憾418
部	分习题	[的解法提示426

第一部分 1650年以前

第1讲

刻痕与咕噜声

在荷马史诗中有这样一个故事,当俄底修斯刺瞎独眼巨人被吕斐摩斯并离开库克罗普斯国以后,那个不幸的盲目老人每天坐在山洞口照料他的羊群,早晨母羊外出吃草,每出来一只,他就从一堆石子中捡起一颗石子,晚上母羊返回山洞,每进去一只,他就扔掉一颗石子,当他把早晨捡起的石子都扔光时,他就确信所有的母羊全返回了山洞.

波吕斐摩斯的故事是利用一一对应概念作为计数²⁾ 根据的最早的文字记载之一。还可以举出有关这个原理的许多例证,例如,说来有点可怕,一些美洲的印地安人通过收集每个被杀者的头皮来计数他们杀敌的数目,又如,一些非洲的原始猎人通过积累野猪的牙齿来计数他们杀死野猪的数目。居住在乞力马札罗山山坡上的马萨伊游牧部落的少女,习惯在领上佩戴铜环,其个数等于自己的年龄。从前,英国的酒保往往通过用粉笔在石板上画记号来计数顾客饮酒的杯数,这就是英语成语"to chalk one up"(记上一笔)的来源,类似地,西班牙的酒保则通过向顾客的兜帽里投放小石子来计数饮酒的杯数,因而产生了西班牙成语"echai chinas"(放一个石子)。一些原始民族往往利用身体的某些部位来表

¹⁾ 荷马(Homeros),约公元前9至8世纪,古希腊诗人,到处行吟的官 歌者,生于小亚细亚,相传他是著名史诗《伊利亚特》和《奥德赛》的作者.——译者注

^{2) &}quot;数"这里读shǐ. —— 译者注

示不同的数.这种肢体计数法显然也是以一一对应原理为依据的.这个原理还出现在曾广泛采用的符契¹¹之中,这里是用木棒上的适当刻痕来记录帐目的,直到1826年英国财政部还采用符契作为法定计数器.古代秘鲁人用结绳来记载人口或其他数目,所谓结绳就是系有各种颜色的打着结的彩线的一条绳索.当然,现在的孩子们是靠核查日历来计数圣诞节或学校放假以前的天数的.几乎所有的人都常常掰着手指计数较小的数目.

现存的最古老的、具有数学意义的人工制品是刻着一些缺口的骨棒,这些缺口按一定的数的形式排列着,骨棒头上的窄槽里插着一片石英.1962年J. de 海因策林(Heinzelin)在刚果的爱德华湖畔的伊尚戈渔场发现的所谓"伊尚戈骨",其年代可以追溯到公元前9000年到6500年,对上面所刻缺口的数学意义只能猜测,专家们的意见还有分岐。

正当几千年前原始人采用在土坯或石板上刻画痕迹这个办法来计数某些集合的数目时,在数学史上最早的一个里程碑出现了. 社会发展到这种程度,简单的计数已经成为不可避免的了.一个部落、一个氏族或者一个家庭,都必须在它的成员之间分配食物,也必须记住它的羊群或牛群的头数.这个过程就是应用一一对应原理的简单计数方法,也或许就是有记载的科学的肇始.

不难揣测:当计数一个不大的集合时,相应于集合的每一个对象, 你开或者蜷拢一个手指,在计数较大的集合时,正如上面的一些例子所表明的那样,往往采用积累石子或木棍、在土坯或石板上做记号、在骨棒或木棒上刻缺口、在绳子上打结等等办法,或许是在后来,逐渐产生了不同的咕噜声作为表达一些较小的集合的对象个数的音符,再后来,才出现用来表示这些数目的各种书写符号(数字),

¹⁾ 贷借关系人在木棒上刻痕来表示款项的数目,一部为二,各块 其一为凭的东西,称为符契.——译者注

虽然上面关于早期计数的发展阶段的描述在很大程度上还是 猜测的,但是古人类学家关于现代原始民族的研究报告,以及在 世界各地出土的一些人工制品,都是支持这种观点的.

在发音计数时期的最初阶段,对于同样数目的不同对象,例如两只羊和两个人,使用不同的咕噜声.对此,我们只须想到在英语中目前仍然使用的一些词组: team of horses (一对马)¹⁾、span of mules(一对骡)、yoke of oxen(一对牛)、brace of partridge (一对鹧鸪)、pair of shoes(一双鞋)."二"这个共同性质的高度抽象,采用与任何具体对象无关的某一个声音来表示,这或许是很久以后才做到的。英语中所使用的数词最初很可能是指一些具体对象的集合,但是这种联系现在我们已经不得而知了,当然,five(五)与hand(手)之间的联系或许是一个例外²⁾。

在一些现代的原始社会中,仍然可以看出某些数词与具体计数集合之间的联系。例如,根据新几内亚东南部的巴布亚部落人采用的一种特殊的计数系统,圣经中的这一段话(约翰5:5): "在那里有一个人,病了三十八年。"应当翻译成。"在那有一个人,病了一人(20)、两手(10)、五和三年。"另外,由于原始民族常常用手指进行计数,所以实际上他们也采用手指的名称作为数词。例如,南美的卡马尤拉(Kamayura)部落人采用"中指"一词作为数词"三",他们把"三天"说成"中指天"。还有,南美的代尼一迪涅(Dene-Dinje)印地安人是通过相继蜷拢手指进行计数的,所以他们也用下列相应的语言来计数。

"一"----"蜷拢小指",

"二"——"再蜷拢无名指",

"三"——"再蜷拢中指",

"四"——"只仲着大指",

¹⁾ 一对马(骡、牛)指两匹拉同一辆车的共轭马(骡、牛). ——译者注

²⁾ 例如,在英语中"一手桔子",指五个桔子——译者注。

"五"——"所有手指都蜷拢",

"十"——"双手的手指都蜷拢",

"四天"——"只伸着大指的天"。

西非的曼丁哥部落人使用的"Kononto"一词(数词"九")字面上的意思是"腹中的婴儿"——指的是怀孕九个月.在马来亚语和阿兹台克语中,数词与具体计数对象之间的联系也是很明显的,在这两种语言中,数词"一"、"二"、"三"在字面上指的是"一块石头"、"两块石头"、"三块石头",类似地,在南太平洋纽埃岛人的语言中,前三个数词字面上的意思是"一个果子"、"两个果子"、"三个果子",而在爪哇语中这三个词的意思是"一颗谷粒"、"两颗谷粒"、"三颗谷粒"。

还可以举出这样一些例子,其中采用无声的语言即适当的手势,根据一一对应原理进行计数.例如,在巴布亚人的肢体计数 法中,通过接触身体的适当部位来表示较小的数,其具体对应关系如下,

1		#	Уĸ	指
Ŧ	•	7 14	′ J']H

2. 右无名指

3. 右中指

4. 右食指

5. 右大指

6. 右手腕

7. 右肘

8. 右肩

9. 右耳

10. 右眼

11. 左眼

12. 鼻

13. 口

14. 左耳

15. 左肩

16. 左肘

17. 左手腕

18. 左大指

19. 左食指

20. 左中指

21. 左无名指

22. 左小指

我们看出,除了插入的表示12和13的"鼻"和"口"以外,前后是对称的。

原始人甚至开化的人,在进行口头计数时都往往做出一些手

勢. 例如,在一些部落中,当说到"十"时,往往用一只手拍另一只手的手心,而当说到"六"时,则使一只手迅速地划过另一只手, K·门宁格(Menninger)说:对于某些非洲人,可以通过观察他们在计数时的动作,来识别他们属于哪个部落、哪个种族:从左手开始还是从右手开始,蜷拢手指还是伸开手指,手心向着身体还是背着身体.

英国人R·梅森(Mason)讲过关于第二次世界大战的一个有趣的故事: 当印度和日本两国爆发战争时,一个日本姑娘正在印度. 为了避免可能会遇到的麻烦,她的朋友把她假充中国人介绍到侨居在印度的英国人赫德利先生那里. 这位英国人有点怀疑,要求这个姑娘用手指依次表示1,2,3,4,5. 她踌躇了一下以后,这样做了. 这时

赫德利先生大笑起来,得意地说:"怎么样!你看见了吧?你看见她是怎样做的?先伸开她的手,然后把手指一个一个地蜷上.你看见过中国人这样做吗?没有!中国人和英国人一样,在数数时先把手蜷拢.她是日本人!"

很久以来,一一对应的概念一直被认为是计数有限集合的根据. 德国数学家G·康托(Cantor)从1874年起发表了一系列重要文章¹⁾,应用这个基本概念来计数无限集合,因此产生了关于超限数的重要理论. 但是,这是数学史上另一个(当然是近代的)里程碑,将在后面的一讲中来介绍.

习 题

1.1 试解释本讲中引用的用巴布亚人的语言翻译的圣 经 中的那一段话(约翰5:5).

¹⁾ 这些文章大部分发表在数学赤志"Matacmatische Annalen"和"Journal für Mathematik"上。

- 1.2 试解释在南美卡马尤拉部落中,"中指"一词是怎样成为数词"三"的。
 - 1.3 南非的组鲁人采用下列对等关系:
 - "六"——"举拇指",
 - "七"——"他指(he pointed)".

你能对此给出解释吗?

- 1.4 苏丹西部的马林凯人采用"dibi"一词表示"四十".这个词字面上的意思是"一个垫子",你能对此给出解释吗?
- 1.5 在不列颠新几内亚,把数词"九十九"说成,"四个人死去了,两只手废弃了,一只脚坏掉了,还有四,"试作解释,
- 1.6 两个集合称为等价的,当且仅当在它们的元素之间能够建立一一对应关系,试证明
- (a) 英语字母表中所有字母的集合等价于前二十六个正整数的集合;
 - (b) 所有正整数的集合等价于所有偶正整数的集合;
 - (c) 集合的等价性是自反的、对称的、传递的,
- 1.7 我们定义两个等价的集合具有相同的基数,设集合A的基数是 α ,集合B的基数是 β ,其中A和B没有共同的元素,这时,集合AUB的基数指的是 $\alpha+\beta$,称为 α 与 β 之和.这个关子基数的二项运算,称为加法.试证明。基数的加法服从交换律和结合律.
- 1.8 设C是以一切有序对(a,b)为元素的集合,其中 a 是集合 A的元素,b是集合B的元素,则集合C称为A与B的笛卡儿积,记为 $A \times B$. 如果A的基数是a,B的基数是 β ,则集合 $C = A \times B$ 的基数指的是 $a\beta$,称为a与 β 之积,这个关于基数的二项运算,称为乘法。试证明:基数的乘法服从交换律和结合律,以及关于基数加法的分配律。
- 1.9 试证明,由五个元素组成的集合A具有2°个子集(包括本身与空集),将这一结果推广到任何有限集合A的情况.
 - 1.10 设集合A含有七个元素,集合B含有五个元素,试问

集合 $A \cap B$ 和 $A \cup B$ 含有多少个元素?将这一结果推广到任何两个有限集合A和B的情况。

参考文献

MENNINGER. KARL. Number Words and Number Symbols. a Cultural History of Numbers. Cambridge. Mass.: The M. I. T. Press. 1969.

ZASLAVSKY. CLAUDIA. Africa Counts. Numbers and Patterns in African Cultura Boston: Prindle. Weber & Schmidt. 1973.

第 2 讲

伟大的埃及金字塔1)

人类最初的几何思考可以追溯到远古时代,那是在当时人们认识物体形式、比较形状和大小的能力所及的范围内,由一些简单的观察无意识地产生的,当然,连反映最迟钝的人也能理解的最早的几何概念之一,就是距离的概念,特别是直线为两点之间的最短路径,因为看来大多数动物都会本能地认识这一点,由无意识到有意识地逐渐产生的另一个几何概念是直线形,例如三角形和四边形,实际上,在圈定宅园的边界时,通常的做法是:首先标出拐角的位置,然后用直线墙壁或篱笆把每两个相邻拐角连接起来,在建造墙壁时,逐渐产生了铅垂线、水平线和垂直线等概念,人们无意中还会注意到自然界各种事物的形状所呈现的许多特殊曲线,例如,太阳和满月的轮廓是圆形的,原木的横截面也是圆形的,追彩虹则是一段圆弧,同样还会发现;抛出的石头

¹⁾ 原文 Pyramid 既指金字塔,又指棱锥, --语双关.----译者注

所经过的轨道是抛物线,吊起的葡萄蔓形成悬链线,盘绕的绳索形成螺线,某些植物的卷须形成螺旋线.某些蜘蛛网大致呈正多边形.投入水池中的一块石头所产生的一组逐渐扩大的同心圆,许多贝壳所具有的美丽花纹,都会使入想到曲线族.许多果实和果核是球形的,树干是圆柱形的,圆锥形的物体在自然界也到处可见.在自然界中(例如在瓜类中),或者当陶工使用轮盘工作时,好奇的人们无意中还会发现各种旋转曲面和旋转体.人、动物和许多植物的叶子都具有左右对称性.每当人们在减边或河岸用一个容器汲水时,就会遇到体积的概念.每当人们在夜晚注视空中的繁星时,就会想到空间的概念和空间中点的概念.事例很多,不胜枚举.

这些最初的关子许多几何概念的朦胧的知识,可以称为无意识的几何学,一些原始民族在他们朴素的艺术作品中就曾应用这种几何学,正如现在的孩子们那样,

后来,几何学进入第二阶段,这时人们的智力发展了,已经能够从一组具体的几何关系归纳出一个一般的抽象关系,后者包含前者作为特殊情况。这样,便可得到一个几何定律或法则。例如,一个小学生可以这样来测量各种长方形的面积。首先把长方形画在方格纸上,然后计数其中包含的小方格的数目,不久,他就可能会归纳出一般的结论。任何长方形的面积大概等于其长与宽之积。又如,当用卷尺测量一些木制圆盘的周长时,小学生还会得到结论。任何圆的周长都稍大于其直径的三倍。

作为一个更成熟的例子,我们考虑一个水平木制圆盘,在其中心竖直地钉上一个钉子,又有一个半径相同的木制半球,在其顶点也钉上一个钉子,现在,把一根粗绳子的一端系在木制圆盘的钉子上,并且围着钉子缠绕起来,呈螺线形,直到盖满木盘为止,量一量所用绳子的长度,然后,用同样的绳子,围着木球的钉子缠绕起来,直到盖满木球为止,再量一量所用绳子的长度.比较两次所用绳子的长度,将会发现,后者总是(非常接近地)等

于前者的二倍,由此可以得到结论,该半球的面积是圆盘面积的二倍,或者一个球的面积等于其大圆面积的四倍,这个事实是阿基米德(Archimedes)在公元前三世纪首先严格地证明的,由于进行这样的试验,几何学变成了实验研究。

几何学的实验研究阶段称为科学的(或者实验的、经验的、归纳的)几何学,尽可能深入地探究其历史根源,我们已经发现有关科学的几何学的大量内容,这种几何学看来在古代东方(地中海以东及亚洲各国)的某些先进地区,从公元前五千年到三千年就已经产生了,用以满足当时工程、农业、商业和宗教的需要。

有趣的是:公元前六百年以前的一切有记录的几何学实质上都是科学的几何学.几何学发展成为一大堆估算法则,有的正确,有的只是近似正确.在一部数学史教程中,需要花费很大的力量来研究古代的巴比伦、埃及、印度和中国的几何学的实验性质.例如,让我们考虑古代中国计算圆弓形的一个公式.这个公式是在《九章算术》一书中发现的1》,该书大约成书于公元前二世纪,不过由于公元前213年的焚书的缘故,据信它是一部还要早得多的著作的复原本.在图 1 中,设°表示圆弓形的弦, °表示 矢°).

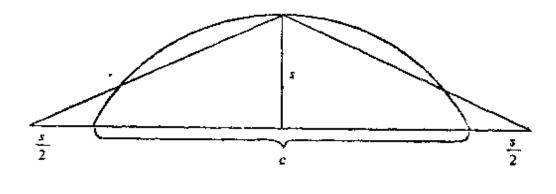


图 1

¹⁾ 见《九章第术》卷第一之〔三五〕。今有弧田、弦三十步、矢十五 步。问为田几何、答曰。一亩九十七步半。术曰。以弦乘 ,矢又自乘,并之,二而一。——译者注 2) 所谓矢,指的是从弓形的弦的中点到弓形的弧的中点之间的距离。

由弓形的弧的中点引两条割线,与o的延长线相交,使得两延长部分都等于s的一半,通过目测可知:圆弓形的面积,近似地等于由o的在的直线与两条割线围成的等腰三角形的面积,假设这两个面积完全相等,我们便得到古代中国人计算圆弓形面积的公式 A=s(o+s)/2. 把这个公式应用于半圆形,不难证明,在这种情况下,这个公式相当于取 $\pi=3$ ——古代数学中经常采用的一个 π 的近似值。

在兰德纸草书¹⁾中,我们发现,古埃及人取圆的面 积等于以圆的直径的 8/9 为一边的正方形的面积。可以证明,这个经验公式相当于取 $\pi = (4/3)^4 = 3.1604\cdots$.

虽然在美索不达米亚出土的大多数数学泥版书²⁾ 表 明古巴比伦人取 $\pi=3$,但是新近发现的一块泥版书(1936年在距巴比伦 200英里的苏塞出土,年代约为公元前1900年到1600年)给出一个更好的近似值 $\pi=3\frac{1}{8}=3.125$.

还可以列举关于早期几何学的科学性的许多其他事例, 能够完全靠实验方法发现的大量几何学知识, 给人们留下了深刻的印象,

如果想要从我们已经知道的古代积累的科学的几何学的知识中,勉强举出一个突出的事例,作为数学史上一个里程碑,那么最好选取莫斯科纸草书中的问题14. 莫斯科纸草书包含25个数学问题,写作年代大约为公元前1850年,不过在当时这些问题早已存在. 这部纸草书是1893年在埃及购买的,现藏莫斯科博物馆. 其中问题14为我们提供了下述数值例子:

¹⁾ 古埃及人把纸草(Papyrus,尼罗河下游一种植物)的茎剖成薄片,压平后用作 结写材料,若干片粘成长幅,卷在木籽上形成卷轴,这种"书籍"在埃及已发现很多,兰 德纸草书是英国人H. Rbind于1858年发现的,现藏英国博物馆,长544厘米,含85道数学问题及其解答,写作年代在公元前1650年以前,——译者注

²⁾ 泥版书是古代的一种文字记录,以楔形文字(cuneiform)刻于粘土版上,于燥后呈坚硬书版,这种的写方式主要流行于西部亚洲和克里特岛,年代大抵在 两个时期,公元前2000年左右和公元前600年到300年之间,——译者注

"给你一个平顶金字塔, 竖高为 6, 底为 4, 顶为 2. 请你把 4 自乘, 得 16, 把 4 加倍, 得 8. 把 2 自乘, 得 4. 把 16, 8 和 4 相加, 得 28. 再取 6 的三分之一, 得 2. 把 28 加倍, 得 56. 你瞧, 它是 56. 结果是正确的."

我们怎样来解释呢? 首先,我们知道,根据在古代一些具有说明性质的例题中的习惯,当描述一个一般方法时,具体数值是无关紧要的。因为一切现存的古埃及的金字塔都是正方锥,所以我们假设,在这个问题中所考虑的是一个正方锥的平头截体(一个正方锥,被一个平行于底的平面截去顶部),其下底是边长为 a=4 的正方形,上底是边长为 b=2的正方形,高为 b=6 。我们按照问题中的提示,算出 $a^2=4\times4=16$, $ab=4\times2=8$, $b^2=2\times2=4$.然后,再算出和 $a^2+ab+b^2=16+8+4=28$ 。接着,再算出 $\frac{1}{3}$ $b=\frac{1}{3}\times6=2$ 。最后,算出积 $\frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)=2\times28=56$ 。然而,我们知道,棱锥的平头截体的体积的正确公式是

$$V = \frac{1}{3}h(B_1 + \sqrt{B_1B_2} + B_2),$$

其中 B_1 为上底面积, B_2 为下底面积,h 为 高。可以看出,上面我们计算给定平顶金字塔的体积的过程,正符合于这个公式。

假设上面对于问题的14解释是正确的,那么让我们再来考虑一下这种算法特别值得注意之处,古代巴比伦人已经知道梯形(也可以看成平顶三角形)的面积等于它的高与两底之和的一半相乘,与此相类似地,他们认为棱锥的平头截体的体积等于它的高与两底面积之和的一半相乘,用上面引人的符号来表示,就是

$$V = \frac{1}{2}h(B_1 + B_2).$$

尽管猜想这个公式能够给出平头截体的体积是很自然的,但是它并不正确。我们当然希望把高h乘以底面 B_1 和 B_2 的某一种平均值,这样来求得平头截体的体积。不过,用 B_1 和 B_2 的算术平均

值即 $\frac{1}{2}(B_1+B_2)$ 是不行的.这里我们所需要的(但并不是很明显的)是 B_1 和 B_2 的希罗平均值(herorian mean),即

$$\frac{1}{3}(B_1+\sqrt{B_1B_2}+B_2).$$

莫斯科纸草书的问题14的古埃及作者,不知如何,但与巴比伦人不同,提出了正确的猜测.当然,这个归纳结果确实是经验几何学中的一项最值得注意的成就.数学家E·T·贝尔!)对此十分重视,以至于他把莫斯科纸草书中的问题14称为"伟大的埃及金字塔";在贝尔看来,这个问题中所包含的归纳法,与保存至今的古埃及的宏伟的大理石金字塔的真实建筑相比,更为重要.它确是数学史上的一个里程碑.

习 题

- 2.1 (a)试通过本讲中描述的实验方法, 推导 古代中国人计算圆弓形面积的公式.
 - (b) 试证明:应用这个公式计算半圆的面积相当于取 $\pi=3$.
 - (c) 试推导由弦 c 和矢 s 表示的圆弓形面积的准确公式.
- 2.2 (a)试证明: 古埃及人求圆面积的方法,相当于取 $\pi = (4/3)^4 = 3.1604 \cdots$.
- (b) 把边长为9个单位的正方形的各边三等分,割去四个三角形的"角",构成一个八边形。由目测可知,这个八边形的面积与正方形内切圆的面积相差很小。试证明,八边形的面积是63个平方单位,因此内切圆的面积与边长为8个单位的正方形的面积相差不大。从兰德纸草书问题48所附的粗略图形可以看出,古埃及人计算圆面积的公式很可能是根据上述推理而得到的。

¹⁾ E·T·贝尔(Eric Temple Bell, 1883—1960), 生于英格兰, 1902年移居美国。著作有, 《数学家》(Men of Mathematics, 1937) 和《数学的发展》(The Development of Mathematics, 1940)等.

- 2.3 在1936年于苏寒出土的古巴比伦泥版书上,把正六边形的周长与其外接圆的周长之比取为57/60+36/3600. 试证明. 这相当于取 $3\frac{1}{8}$ 作为 π 的近似值.
- 2.4 求平均值的思想在经验几何学中是很常见的.例如,我们在兰德纸草书中发现,边长依次为 a, b, c, d 的四边形的面积 K由下式给出.

$$K = \left(\frac{a+c}{2}\right)\left(\frac{b+d}{2}\right)$$
.

- (a) 试证明:上面这个公式对于一切非长方形的四边形给出过大的结果.
- (b) 假设这个公式是正确的,那么试证明: 三角形面积应当等于任何两边之和的一半乘以第三边的一半,我们在现存的来自埃德弗(Edfu)年代、比兰德纸草书大约晚1500年的一份契约中发现这个公式。
- 2.5 试解释在年代大约为公元前2500年的一块巴比伦 泥 版书上发现的下面一段话:

"圆周长为60, 矢为2, 求弦,"

"你把 2 加倍,得 4.由 20 减 4,得16.把20自乘,得400. 把16自乘,得256.由400减256,得144.把144 开方,得 12.这个平方根就是弦.这就是解法."

- 2.6 古代印度的宗教著述《绳法经》、《绳法经》(Śulvasūtras,写作年代大约为公元前500年)在数学史上是有价值的,因为这里记载着设计祭坛时应用的一些几何法则,并且说明当时印度人已经知道毕这哥拉斯定理. 特别是,其中给出了化圆为方问题的一些解法,它们相当于取 $d=(2+\sqrt{2})s/3\pi s=13d/15$,这里 d 是圆的直径,s 是相应的正方形的边长. 试问这些公式相当于取 π 的怎样的近似值?
 - 2.7 设m 和n是两个正数,我们把m 和n 的算术平均值、希

罗平均值和几何平均值分别定义为A=(m+n)/2, $H=(m+\sqrt{mn}+n)/3$ 和 $G=\sqrt{mn}$. 试证明 $A \gg H \gg G$,当且仅当 m=n 时等式成立。

- 2.8 假设我们所熟知的棱锥体积公式成立(即棱锥的体积等于底与高之积的三分之一),试证明棱锥的平头截体T的体积等于T的两底的希罗平均值与T的高之积.
- 2.9 设 a, b 和 h 分别表示正方锥的平头截体 T 的下底的边长,上底的边长和高. 把 T 分割为: (1)一个长方体 P ,其底为 b^2 ,高为 h; (2)四个直三棱柱 A, B, C 和 D, 每个的体积为 b(a-b)h/4; (3)四个正方锥 E, F, G 和 H, 每个的体积为 $(a-b)^2h/12$. 由此可得T的体积公式

 $V = h(a^2 + ab + b^2)/3$.

2.10 考虑习题2.9中被分割的平头截体T. 把P沿水平方向截成三段,每一段的高均为h/3,称其一段为U. 把A, B, G, D 合并成一个长方体Q, 其底为b(a-b), 高为h. 把Q 沿水平方向截成三段,每一段的高均为h/3. 用底为 $(a-b)^2$ 、高为h/3的长方体R来代替E, F, G, H. 把P的一段和Q的一段合并成一个长方体V, 其底为ab, 高为h/3. 把P的一段同Q的两段以及R合拼成长方体V, 其底为 a^2 , 高为h/3. 于B, B0 计划 是,B1 计划 B2 计划 B3 计 B4 计 B5 计 B6 计 B7 计 B8 计 B9 计 B9 计 B1 计 B1 计 B2 计 B3 计 B4 计 B5 计 B6 计 B7 的体积等于这三个长方体B7 ,B8 计 B9 计 B1 计 B1 计 B2 计 B3 计 B4 计 B5 计 B6 计 B7 的体积等于这三个长方体B7 ,B8 计 B9 计 B1 计 B1 计 B2 计 B3 计 B4 计 B5 计 B6 计 B7 的体积 B8 计 B9 计 B9 计 B1 计 B1 计 B1 计 B2 计 B3 计 B4 计 B5 计 B6 计 B7 的体积 B8 计 B9 计 B9 计 B1 计 B1 计 B2 计 B3 计 B4 计 B5 计 B6 计 B7 计 B8 计 B9 计 B9 计 B9 计 B9 计 B1 计 B1 计 B1 计 B2 计 B3 计 B4 计 B5 计 B6 计 B7 计 B8 计 B9 计 B9 计 B1 计 B1 计 B1 计 B2 计 B3 计 B4 计 B5 计 B6 计 B7 计 B8 计 B9 计 B9 计 B1 计 B1 计 B1 计 B2 计 B3 计 B4 计 B5 计 B6 计 B7 计 B8 计 B9 计 B9 计 B1 计 B1 计 B1 计 B2 计 B3 计 B4 计 B5 计 B5 计 B6 计 B7 计 B8 计 B9 计 B1 计 B1 计 B2 计 B3 计 B4 计 B5 计 B6 计 B7 计 B8 计 B9 计 B9 计 B1 计 B1 计 B2 计 B3 计 B4 计 B5 计 B6 计 B7 计 B8 计 B9 计 B9 计 B1 计 B1 计 B2 计 B3 计 B4 计 B5 计 B6 计 B7 计 B8 计 B9 计 B9 计 B9 计 B1 计 B2 计 B3 计 B4 计 B5 计 B5 计 B6 计 B7 计 B8 计 B9 计 B9 计 B1 计 B1 计 B1 计 B2 计 B3 计 B4 计 B5 计 B6 计 B8 计 B9 计 B9 计 B9 计 B1 计 B2 计 B1 计 B2 计 B2 计 B3 计 B3 计 B3 计 B3 计 B4 计 B5 计 B5 计 B5 计 B5 计 B6 计 B7 计 B8 计 B9 计 B9 计 B1 计 B2 计 B1 计 B2 计 B3 计 B3

参考文献

GILLINGS, R. J., Mathematics in the Time of the Pharaohs. Cambridge, Mass., The M. I. T. Press, 1972.

NEUGEBAUER, GTTO, The Exact Sciences in Antiquity. 2nd ed, New York: Harper & Row, 1962.

第 3 讲

从实验室到书斋

大约在公元前 600 年,几何学进入了第三个发展阶段.数学史学家们一致认为,数学的这一重大进步应当归功于当时的希腊人,并且认为一些最早的杰出成就应当属于米利都的泰勒斯(Thales of Miletus)——古代"七贤"()之一.看来泰勒 斯 早期 经 商,赚有足够的钱财以维持他后来的研究和旅行生活.他曾到埃及旅游,并把埃及人的几何学知识带回米利都.他多才多艺,作为政治家、律师、工程师、实业家、哲学家、数学家、天文学家,以多方面的成就闻名于世,他是在数学史上留名的第一人,也是有幸占有一些演绎几何学定理的发明权的第一人.一般认为下面这些初等结果是属于他的。

- 1. 圆被任何直径二等分.
- 2. 等腰三角形两底角相等.
- 3. 两直线相交,其对顶角相等,
- 4. 两角及夹边对应相等的两三角形全等.
- 5. 内接于半圆的角是直角:

上面这些结果在泰勒斯时代以前很久人们肯定就已经知道, 用实验方法都很容易得到.这些结果的价值不能用它们的内容来 衡量,它们的价值在于人们相信泰勒斯不是靠直观和实验,而是 用某种逻辑推理——给出证明的.例如,第三个结果用实验方法就 很容易证明:用剪刀剪出一对对顶角,使其中一个角同另一个角重 叠起来.然而,泰勒斯很可能是像我们现在在最初的一节几何课

¹⁾ 传说中公元前七世纪末或六世纪初希腊的七位天才人物,留有许多著名的格官,例如"贵有自知之明"(know yourself)、"过犹不及"(nothing to excess)等.柏拉图认为他们是, Thales. Pittacus Solon, Cleobulus, Bias, Chilon和Myson of Chen.还有一些不同的说法。——译者注

中那样推导出这个结果的。在图 2 中,我们想要证明 $\angle x = \angle y$ 。

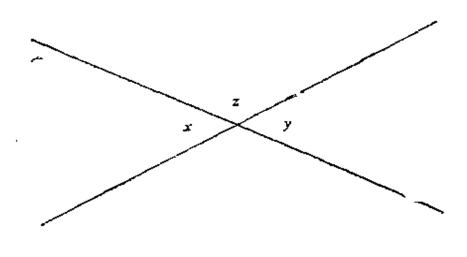


图 2

在当时的所有民族中,为什么只有希腊人认为几何事实必须通过合乎逻辑的论证而不能通过实验来确立,其原因有时被称为希腊的奥秘·学者们试图对希腊的奥秘给以解释,虽然没有一种解释令人十分满意,但是所有解释加在一起,看来是可以接受的.一种最通常的解释是:出现这种情况的原因在于古典时期的希腊人对哲学研究具有特殊的兴趣.在哲学中,人们关心的是可以从假设的前提推出的必然的结论,而实验方法只能给出一个已知结果出现的概率.哲学家们发现演绎推理是他们不可缺少的工具,因此,当希腊人开始考虑几何学时,自然喜好采用演绎方法.

对希腊的奥秘的另一种解释在于希腊人对美的追求,这在他们的艺术、书法、雕塑和建筑等方面都明显地表现出来了,对于美的鉴赏不但是感性的经验,而且是理性的认识,从这种观点来看,演绎论证中所体现的条理性、一致性、完备性和确定性,都是令人神往的.

对希腊的奥秘还有一种解释,认为这与古典时期希腊社会所 具有的奴隶制性质是分不开的,特权阶级依赖奴隶阶级而生存, 广大奴隶经营商业、管理工业、照料家务,他们既从事技术性工 作,又负担笨重的工作,这种奴隶制度自然会促进理论与实际相 分离,使得特权阶级的成员偏爱演绎推理和抽象归纳,而轻视经 验和实际应用.

最后一种解释实质上是说。过去出现的经济和政治动乱已经平息,社会安定,经济繁荣。那时已经进入铁器时代,发明了字母,采用了货币,在地理上也有了新发现。客观世界已经为一种新型文化做好准备,这种新型文化是在更向前看、更富于想象力的人们当中出现的,他们生活在沿小亚细亚海岸、后来在希腊大陆、西西里岛和意大利海岸分布的一些贸易城市里。这些贸易城市大都是希腊的殖民地。在一种不断发展的理性主义的气氛中,人们不但要考虑"如何",而且开始探讨"为何"。实验方法对于回答"如何"的问题是适用的,但是对于回答"为何"的问题就很不够了,用演绎法进行的尝试仅限于证明问题本身,结果却使得演绎法发展起来了,现代学者认为这种方法乃是数学的一个基本特点。

且不管怎样解释希腊的奥秘才算正确,总必须承认:古典时期的希腊入使得几何学转变为与汇集前人流传下来的各种经验方法大不相同的一门学问.而且,演绎的思考首先是在几何学中而不是在代数学中进行的这一事实,确立了保持至今的一个数学传统.

但是,决不能认为希腊人回避数学中的一切经验方法和实验 方法,因为几乎没有任何重要的数学事实离开某种形式的感性认识就能得到,这样说并不过分,在用演绎法证明或者反证一个数 学命题之前,首先需要猜想到它,而一个猜想不过是根据直觉、观察、类比、实验或其他经验方法感到有可能成立的一个揣测。演绎法是一种用来进行解释的有说服力的正规模式,而不是获得发现的手段。它是一套复杂的工具,还需要有加工的材料,而这种材料通常是由经验思考来提供的。甚至连演绎证明或反证的具体步骤也不能由演绎法本身看出来,而必须通过尝试、失败、总结经验和敏捷的思考才能知道。事实上,善于猜想乃是优秀的数学家的基本素养之一。这里,重要的是希腊人坚决主张:由猜想或实验得到的一个数学命题,必须再通过演绎法给出严格的证明,而无论用实验证实多少次都不能确立这个命题。

为了在几何学上取得成功,不论是创造者还是解题者,他都必须依赖于实验,画出和考察无数图形,这样试试,那样试试. G·伽利略 (Galilei,1564—1642) 在 1599 年试图通过使一个旋轮线¹⁾形模板与一个圆形模板(其而积与旋轮线的 生成圆的面积相等)保持平衡,以此来确定旋轮线一拱下的面积. 由于他使用的台秤存在微小的误差,结果他错误地认为旋轮线一拱下的而积非常接近于但不等于生成圆的面积的三倍. 事实上,旋轮线一拱下的面积正好等于生成圆的面积的三倍;证明了这一点并 首先 发表(1644)的是伽利略的一个学生,E.托里拆利(Torricelli,1608—1647),他使用的方法是早期的积分法.

B·帕斯卡(Pascal, 1623—1662)在他还是一个小孩子的时候,就"发现"三角形三内角之和等于一个平角,他的办法是做一个简单的实验——折叠用纸剪成的三角形.

阿基米德(Archimedes,公元前287(?)—212)在他的专论《方法》(Method)中介绍了他怎样 首先通过力学上的考虑认识到球的体积等于4πr³/3,其中 r 是球的半径.但是阿基米德的数学禀赋决不允许他把他的力学方法当作证明,而是接着就补充了一个严

¹⁾ 当一个圆沿一条直线无滑动地滚转时,固定在圆周上的一点形成的轨迹称为旋轮线,亦称摆线,该圆称为其生成圆。

格的论证.

实际构造一个正圆锥;把它装满沙子,再把沙子倒在一个半 径相同、高度相同的正圆柱之中,这样进行三次,我们就会猜想 到:正圆锥的体积等于其高与其底面面积之积的三分之一.

关于变分法中的极大和极小问题的许多初步猜想,最初都是 通过肥皂薄膜实验而得到的.

我们决不应当轻视这一类实验和方法,因为毫无疑问,大量的几何事实都是这样"发现的". 当然,一旦得出一个几何猜想,就必须像阿基米德那样,通过演绎推理来证明或者否定它,想方设法使问题完全解决. 有许多几何猜想,只要我们仔细画出一个图形,或者考察某一极端情况,往往就会被放弃.

产生几何猜想的一种富有成效的方法,便是利用类比,虽然必须承认,有许多这样得到的猜想最终被证明是错误的.空间几何的大量事实都是通过与平面中的相应情况进行类比而发现的,在高维空间几何中,类比起着非常重要的作用.

在教育学中有一个原理,根据的是生物学家简单叙述的著名 法则:"个体发育再现系统发育",其含义是:一般地说,"个体重 复群体的发展过程".这个教育学原理至少大体上表明,在向学生 讲授一门学问时,应当按照这门学问发展的顺序来进行.我们以 几何学为例来说明一下.我们已经看到,在历史上几何学的发现 经历了三个阶段:首先是无意识的几何学,然后是科学的几何学, 最后是论证的几何学.因此,根据上述教育学原理,首先应当以 无意识的形式,或是通过简单的工艺劳作,或是通过对自然界中 的现象进行简单的观察,向小学生介绍几何知识.这样,小学生 便可在无意中熟悉大量的几何概念,例如距离、角、三角形、四 边形、铅直线、垂线、平行线、直线、圆、螺线、球、圆柱、圆 锥,等等.随后,就应当在这些感性知识的基础上建立科学的几 何学,这时学生们通过实验(使用罗盘和标尺,直尺和半圆仪, 剪刀和浆糊,简单的模型,等等)归纳出一系列几何事实.最后, 当学生们已经相当成熟时,才能够以论证的或演绎的形式向他们 讲授几何学,并且指出以前用的那些方法的优点和缺点,

目前,在我们中学里,几何学教学大纲的薄弱环节在于第二阶段,即科学的几何学阶段.没有足够的时间用于这一阶段.关于经验的或实验的几何学,需要讲的内容是很多的.在这里花费一些时间有助于学生们牢固地掌握许多几何概念.这样,既可以使学生们懂得预先的归纳过程在数学中的重要性和必要性,同时又可以向他们指出:归纳的结果如果不继之以严格的论证,就会产生纰漏.为了把这种几何教学方法进一步推广并且使之更有价值,中学教师需要这样一本书,它很好地收集了使用价格便宜、容易制造的模型进行的许多简单而重要的几何实验.我们热切地盼望有人能来编写这样的著作.1>

习 题

3.1 印度数学家阿耶波多(Aryabhata,, 476—550(?))在六世纪初写了一首诗, 共33联, 称为"数学"(Ganita). 其中 两联的译文如下所述:

三角形的面积等于高与半底之积, 六棱体的体积等于底面面 积与高之积的一半.

圆的面积等于半周长与半径之积; 球的体积等于大圆面积与 其本身的平方根之积.

试证明:阿耶波多给出的这些结果在平面情况是正确的,在 空间情况是不正确的,由此也可看出,当希腊数学发展到演绎阶 段以后很久,印度数学仍然处于经验阶段。

3.2 有两个推测表明, 泰勒斯在埃及利用太阳 下的阴影算 出了金字塔的高度, 因而大受称赞, 较早的一个推测是亚里士多

i) 对于数学中的归纳与类比感兴趣的读者,可以进一步参考G.波利亚的名者《数学与猜想》,科学出版社,1984.——译者注

德的学生哲罗姆(Hieronymus)提出的:泰勒斯测量出 当人影与身高相等时金字塔的影长,这样就确定了塔高·较晚的一个推测是普鲁塔克(Plutarch)提出的:泰勒斯在地面上立起一根木棍,然后利用两个相似三角形进行计算。两个推测都没有提到在两种情况下都存在的一个极大困难:如何求得金字塔的影长,即从塔尖的阴影到塔底中心的距离。

由上面这个未说明的困难引出了所谓泰勒斯疑难(Thales Puzzle): 试给出一种方法,通过测量阴影和应用相似三角形来确定金字塔的高度,且不论在什么纬度和在一天或一年中的什么时间,这种方法都应当适用. (有一种巧妙的方法,即进行两次测量,时间相差几个小时.)

- 3.3 假设两条平行线与第三条直线相截而形成的内错角相等,试证明下述定理:
 - (a) 三角形内角之和等于一个平角.
 - (b) n边凸多边形内角之和等于n-2个平角.
 - 3.4 假设长方形的面积等于长与宽之积,试证明下述定理:
 - (a) 平行四边形的面积等于底与高之积.
- (b) 三角形的面积等于任何一边与这一边上的高之积的二分之一.
 - (c) 直角三角形的面积等于两直角边之积的二分之一。
 - (d) 三角形的面积等于周长与内切圆的半径之 积 的 二 分之
 - (e) 梯形的面积等于其高与上、下底之和相乘的二分之一.
 - (f) 正多边形的面积等于周长与边心距之积的二分之一...
 - (g) 圆的面积等于圆周与半径之积的二分之一:
- 3.5 假设: (1)圆心角由它所对的弧来度量, (2)三角 形 的内角之和等于一个平角, (3)等腰三角形的两底角相等, (4)圆的切线与指向切点的半径垂直,试证明下述定理:
 - (a) 三角形的一个外角等于两个不相邻的内角之和,

- (b) 圆周角由它所对之弧的二分之一来度量.
- (c) 立于半圆上的圆周角是直角:
- (d) 圆内相交的两弦所成之角由它所对两弧之和的二分之一来度量.
- (e) 圆的两条相交的割线所成之角由它所对两弧之差的二分之一来度量.
- (f) 圆的一条切线与过切点的一条弦所成之角由它所对之弧的二分之一来度量,
- (g) 圆的一条切线与一条割线所成之角由它所对两弧之差的 二分之一来度量.
- (h) 圆的相交的两条切线所成之角由它所对 两 弧 之 差来度量.
- 3.6 试通过实验方法,即折叠一个纸剪的三角形来证明三角 形的三内角之和等于一个平角。
- 3.7 为了三等分圆心角AOB,有人提出这样做。把弦AB三等分,然后把这些分点与圆心O相连。当圆心角很小时,这个方法似乎还可采用,试取接近于180°的圆心角,来说明这个方法显然是错误的。
- 3.8 两个梯子,长度分别为60英尺和40英尺,立在两座楼房之间的过道上。梯子的底端分别放在两楼的墙根,顶端靠在对面的墙上。如果两个梯子的交叉点与地面的距离为10英尺,那么过道的宽度是多少?(注:1英尺=0.3048米)

试画图求出近似解.如果用代数方法处理这个问题,则需要解一个二次方程.设a,b分别表示两个梯子的长度,c表示交叉点的高度,x表示过道的宽度,可以证明

$$(a^2-x^2)^{-1/2}+(b^2-x^2)^{-1/2}=c^{-1}$$
.

3.9 设F, V, E分别表示一个多面体的面数、顶 点数和棱数, 对于四面体、立方体、三棱柱、五棱柱、方锥、五棱锥、割去一个角的立方体、立方体和立在它的一个面上的方锥组成的立

- 体,我们有V-E+F=2。你能想到对于一切多面体,这个公式都成立吗?
- 3.10 存在这样一些凸多边形,它们的各面都是三角形 (例如四面体)、四边形(例如立方体)、五边形 (例如十二面体). 你认为这种情况能够继续下去吗?
- 3.11 (a)考虑一个凸多面体P,设C是它的内部的任何一点.我们可以想象,P中充满物质,其质量分布是不均匀的,但是使得P的重心恰好与C相合.如果我们把这个充满物质的多面体扔到水平的地板上,那它就会停止在一个面上(否则它将永远运动下去).试说明这样一些考虑对于下述几何命题给出了一个力学论证:"给定一个凸多边形P,以及它的内部的一点C,则存在P的一个面P,使得由C向F的平面所引垂线的垂足处于F的内部."
 - (b) 试对于(a)中的命题给出一个几何证明:
- 3.12 考虑一个椭圆,两个半轴为 a 和 b ,如果 a=b ,则 这个椭圆变成一个圆,而两个表这式、

$$P = \pi (a+b) \pi P' = 2\pi (ab)^{1/2}$$

都成为 $2\pi a$,即这个圆的周长.这就使我们想到,P或者P'有可能是任何椭圆的周长E.试讨论之.

- 3.13 如果跑道的内侧是一个椭圆(但不是圆),而跑道的宽度不变,试问:跑道的外侧也是椭圆吗?
- 3.14 三角形的三条高线相交于一点,试问四面体的四条高线也相交于一点吗?
- 3.15 相应于下述平面几何定理, 试表述类似的空间几何定理.
- (a) 三角形三内角的平分线相交于一点,这一点就是三角形内切圆的圆心。
- (b) 圆的面积等于一个三角形的面积,这个三角形的底等于圆的周长,高等于圆的半径.
 - (c) 等腰三角形底上的高与底的交点是底的中点.

参考文献

VAN DER WAERDEN, B. L., Science Awakening, tr. by Arnold Dresden. New York: Oxford University Press, 1961; New York: John Wiley, 1963(平装).

第 4 讲

第一个重要定理

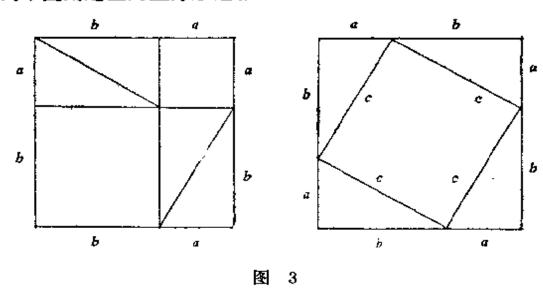
初等几何中最精彩的、当然也是最著名和最有用的定理之一,就是所谓毕达哥拉斯定理,它断言:"在任何直角三角形中,斜边上的正方形等于两个直角边上的正方形之和."如果我们想要举出一个定理,它的出现称得上是数学史上的里程碑,那么毕达哥拉斯定理或许就是最佳选择,因为它是数学中第一个真正重要的定理.但是,当我们来考察这个定理的起源时,就会感到没有把握.虽然在传说中都把这个定理归功于毕达哥拉斯,但是通过二十世纪对于在美索不达米亚出土的楔形文字泥版书进行的研究,人们发现早在毕达哥拉斯以前一千多年,古代巴比伦人就已经知道这个定理.而且,在中国和印度的某些古籍中也出现了这个定理!1,其年代至少可以追溯到毕达哥拉斯时代.但是,这些希腊以外的、或许比希腊更早的文献都没有包含达个定理的证明,首先给出合乎逻辑的证明的可能就是毕达哥拉斯本人,也可能是他的著名团体中的某一成员.

¹⁾ 例如我国西汉或更早时期的天文历算著作《周髀算经》,其中第一章记述了西周开国时期(约公元前1000年)商高对于周公姬旦的回答。"故折矩以为勾广三、股修四、径隅五",即"勾三、股四、弦五"。又如系统总结我国先秦到西汉初年数学 成就的著作《九章算术》,在第九章"勾股"中,从第1题到第14题都是运用这个定理解决的实用问题。因此,我们又把这个定理称为"商高定理"或"勾股定理"。——译者注

现在我们来简单地介绍一下毕达哥拉斯,以及他的那个有点 神秘的团体,毕达哥拉斯是在数学史上留名的第二人,透过古代 传说的迷雾,我们可以推测:毕达哥拉斯于公元前大约572年生在 爱琴海上的萨摩斯岛,这里与著名学者泰勒斯的家乡——米利都 距离不远,毕达哥拉斯比泰勒斯小五十岁,住得又这么近,可能曾 受教于这位老人, 同泰勒斯一样, 毕达哥拉斯在一个时期曾旅居 埃及,后来到各地漫游,也许还到过印度, 当返回家乡以后, 他 发现萨摩斯正处于波吕克刺提的暴政之下,爱奥尼亚的大部分地 区都被波斯人所统治, 因此他迁往希腊海港克罗托内, 定居在南 意大利,在这里他建立了著名的毕达哥拉斯学园,这个团体不但 研究哲学、数学和自然科学,而且还发展成为一个具有秘密仪式 和严格戒律的宗教性组织, 当它的政治力量和贵族倾向逐渐增强 之时,南意大利的民主势力便摧毁了学园的设施,迫使这个团体。 解散,据说,毕达哥拉斯逃到了梅塔篷图姆,并终于此地,享年 七十五(一说八十),可能是被追捕他的人所杀害,他的团体虽然 形式上解散了, 但仍继续存在了大约两个世纪,

毕达哥拉斯学派的哲学同印度古代哲学有些类似之处,二者都依赖于这样一个假设,整数是人和物的各种性质的起因,也就是说,整数不但从量的方面而且从质的方面支配着宇宙万物,对于整数的这种认识和推崇,促使他们进行深入研究,因为他们以为通过揭示整数的复杂性质,或许可以左右和改善自己的命运,因此,他们热衷于研究数,也研究几何学,因为几何学与数有着密切的联系,由于毕达哥拉斯采取口传心授的方式进行教学,又由于这一学派照例把一切发现都归功于他们所崇拜的领袖,所以现在我们很难区分哪些数学成就属于毕这哥拉斯本人,哪些成就应当属于这一学派的其他成员。

现在再来讨论毕达哥拉斯定理,我们自然想要知道或许是由 毕达哥拉斯本人对于以他的名字命名的这个重要定理所给出的证 明的性质究竟如何,对此存在许多猜想,但是一般都认为最初的 证明是分割型的,像下面介绍的这样。设 a, b, c 分别表示给定的直角三角形的两个直角边和斜边,考虑图 3 中的两个正方形, 边长都是 a+b. 把第一个正方形分成六部分,即两个直角边上的正方形和四个与给定的直角三角形全等的三角形。把第二个正方形分成五部分,即斜边上的正方形和四个与给定的直角三角形全等的三角形。从等量中减去等量,便可推出。斜边上的正方形等于两个直角边上的正方形之和。



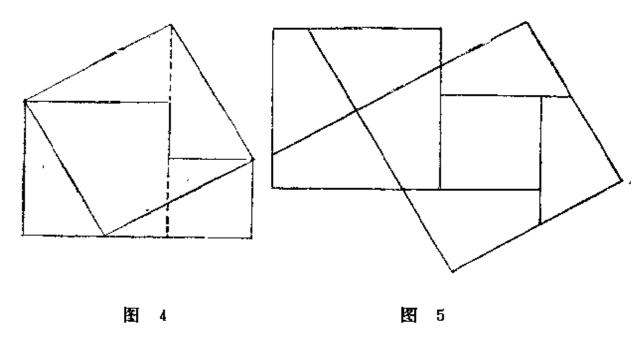
为了证明第二种划分的中央部分的确是一个边长为 c 的正方形,我们需要利用这样一个事实: 直角三角形的三个内角之和等于二直角. 但是,对于一般三角形都成立的这个事实,正是毕达哥拉斯学派的贡献. 因为要想证明这个一般事实又需要知道平行线的某些性质,所以平行线理论的发展也应归功于早期的毕达哥拉斯学派.

或许在整个数学中还找不到另一个定理,其证明方法之多能够超过毕达哥拉斯定理. E.S. 卢米斯(Loomis)在他的《毕达哥拉斯定理》(The Pythagorean Proposition)*一书的第二版中,收集了这个著名定理的370种证明方法,并且进行了分类.

^{* 1940}年发表于 Edward Brothers 私人出版的 Ann. Arbor, Mich. 后又由The National Council of Mathematics, Washington, D. C. 重印.

两个平面或空间图形P和Q,如果能够分割成一些对应相等的部分,则称为相加全等的.如果能够在两个图形P和Q上增添一些对应全等的部分,使得所得到的两个新的图形是相加全等的,则P和Q 称为相减全等的.在毕达哥拉斯的各种证法中,有许多都是通过证明直角三角形斜边上的正方形同两直角边上的正方形之和相加全等或相减全等来实现的.上面讲过的、据说是毕达哥拉斯给出的证明,就是一种相减全等的证明.

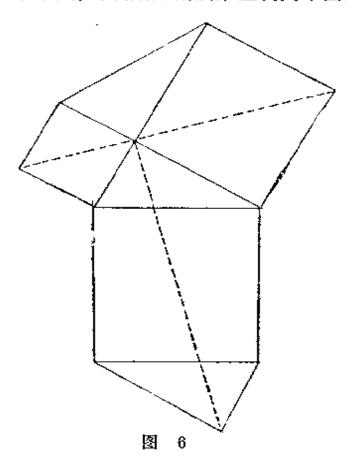
图 4 和图 5 表示毕达哥拉斯定理的两种相加全等的证明;第一种证明是H.珀里加尔(Perigal)在1873年给出的*,第二种证明是H·E·杜登尼(Dudeney)在1917年给出的。图 6 表示一种相减全等的证明,据说是L.达.芬奇(da Vinci, 1452—1519)设计的.



有趣的是,任何两个面积相等的多边形都是相加全等的,其划分总能使用直尺和圆规来完成.另一方面,M.德恩(Dehn)在1901年证明:两个体积相等的多面体不一定是相加或相减全等的.特别是不可能把一个正四面体分割成一些部分,重新拼凑起来构成一个立方体.欧几里得(Euclid)在他的《原本》(Elements,大约

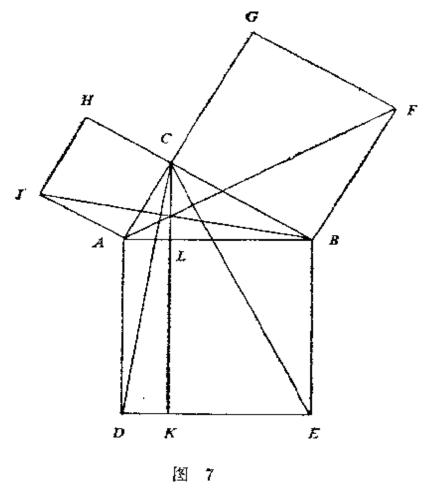
^{*} 实际上是重新发现的,因为这种划分方法labit ibn Qorra (826—901) 已经知道。

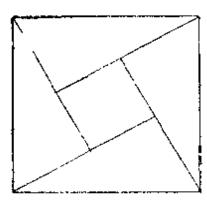
公元前300年)一书中,有时利用分割法来证明两个图形面积相等。



欧几里得在《原本》第一卷的命题47中,给出了毕达哥拉斯定理的一个极其巧妙的证明,如图 7 所示,有人把这个 图 形 称 为 "修士的头巾",也有人称为"新娘的轿椅"。证明梗概如下所述。 $(AC)^2 = 2\triangle JAB = 2\triangle CAD = ADKL$. 同 理, $(BC)^2 = BEKL$. 所以 $(AC)^2 + (BC)^2 = ADKL + BEKL = (AB)^2$.

中学教师有时向学生们介绍印度数学家兼天文学家婆什迦罗(Bhāskara, 活跃于1150年前后)对于毕达哥拉斯定理给出的一种奇妙的证明。这也是一种分割型的证明,即把斜边上的正方形划分为五部分,如图 8 所示,其中四部分都是与给定的直角三角形全等的三角形,一部分是正方形,边长等于给定的直角三角形两直角边之差。很容易把这五部分重新拼凑在一起,得到两个直角边上的正方形之和。婆什迦罗画出了这个图形,但是没有进一步解释,只是说:"正好!"。当然,只要稍微做一点代数运算就能给出





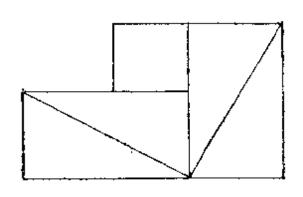


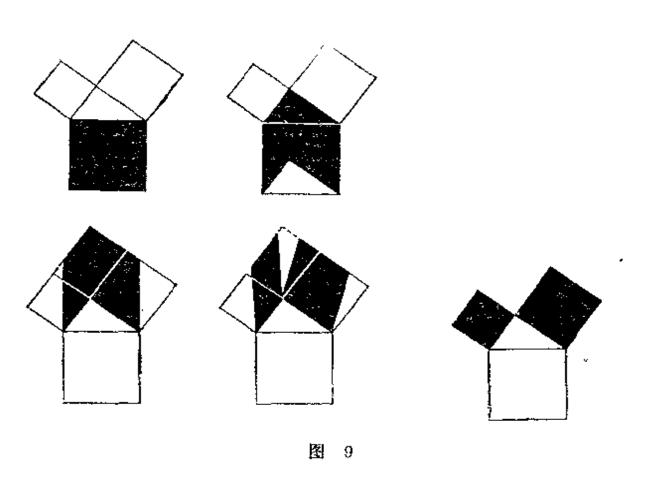
图 8

证明. 因为,如果设c, a, b分别为给定的直角三角形的斜边和两个直角边,则

$$c^2 = 4(ab/2) + (b-a)^2 = a^2 + b^2$$
.

毕达哥拉斯定理的一种或许更为直观的证明是动画片式的证

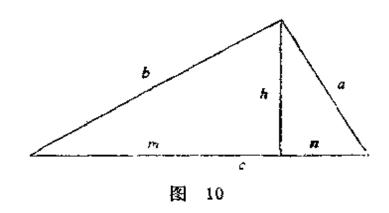
明:即通过图 9 所示的各个阶段,斜边上的正方形被连续地变换 为两个直角边上的正方形。



婆什迦罗还给出毕达哥拉斯定理的另一种证法,即画出斜边上的高,由图10中的两个相似三角形,我们有

c/b=b/m n c/a=a/n,

即



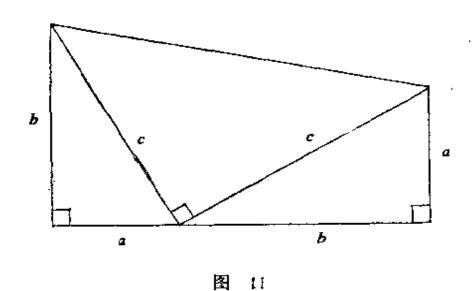
 $cm=b^2$ π $cn=a^2$.

相加,便得到

$$a^2 + b^2 = c(m+n) = c^2$$
.

这个证明,在十七世纪又由英国数学家J.沃利斯(Wallis, 1616—1703)重新发现.

有几位美国总统与数学有着微妙的联系. G.华盛顿曾经是一个著名的测量员, T.杰弗逊大力促进美国的高等数学教育,据说 A. 林肯是通过研究欧几里得的《原本》来学习逻辑的. 更有创造的是第十七任总统J.A.加菲尔德(Garfield, 1831—1888), 他在学生时代对于初等数学具有强烈的兴趣和高超的才能. 在1876年, 当他还是众议院议员的时候(五年以后才成为美国总统), 他独立地发现了毕达哥拉斯定理的一个很漂亮的证明方法, 是他在同其他国会成员讨论数学时提出的, 后来在《新英格兰教育杂志》上发表了. 中学生在学习几何时对于这种证法总是很感兴趣, 因为可以由他们已经知道的梯形面积公式直接推出, 即采用两种不同的方式来计算图11中的梯形面积, 首先利用梯形面积公式(两平行边之和的一半, 乘以这两边之间的距离), 然后求组成这个梯形的三个直角三角形的面积之和. 令这样得到的两个梯形面积表达式相等, 我们有(见图11)



$$(a+b)(a+b)/2=2[(ab)/2]+c^2/2$$

即

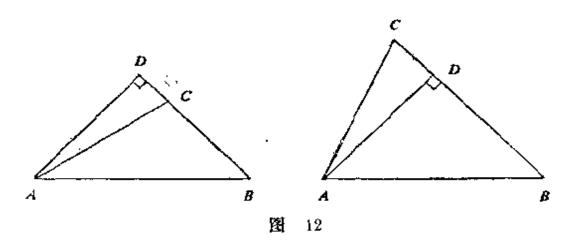
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$
,

因此

$$a^2 + b^2 = c^2$$
.

因为对于两直角边为a和b、斜边为e的任何直角三角形,存在一个梯形(如图所示),所以毕达哥拉斯定理得证。

同许多其他重要定理一样,毕达哥拉斯定理也有各种推广,甚至在欧几里得时代,人们就已经知道其中的一些、例如,《原本》第六卷的命题31说的是: "在一个直角三角形中,在斜边上所画的任何图形的面积,等于在两个直角边上所画的与其相似的图形的面积之和。"这个推广,不过是用在直角三角形的三个边上所画的任何三个相似的图形来代替原来的三个正方形。一个更有价值的推广来自于第二卷的命题12和13. 把这两个命题合并起来,用现代语言来叙述,就是: 在一个三角形中,与钝角(锐角)相对的边上的正方形,等于其他两边上的正方形之和,加上(减去)这两边中任何一边与另一边在它上面的投影之积的二倍。也可用图12中的符号表述如下:



 $(AB)^2 = (BC)^2 + (CA)^2 \pm 2(BC)(DC)$.

其中取加号还是减号根据三角形ABC的角C是鲍角还是锐角来决

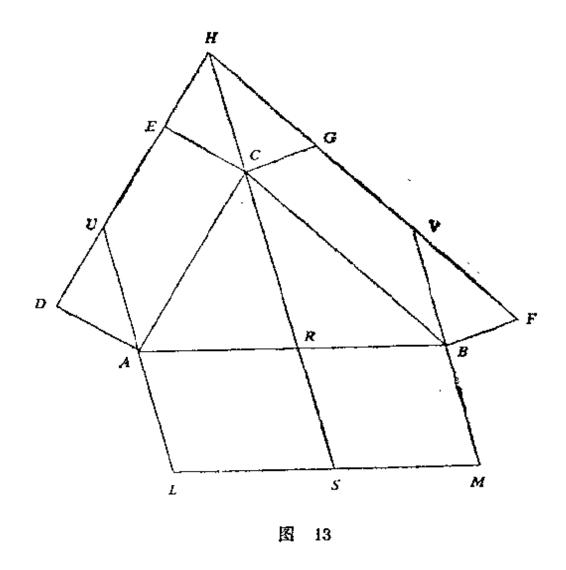
定,如果采用有向线段,则可以把第二卷的命题12和13,以及第一卷的命题4)(毕达哥拉斯定理),用统一的方式表示如下:

 $(AB)^2 = (BC)^2 + (CA)^2 - 2(BC)(DC)$.

因为 DC=CA cos BCA, 所以我们看出,最后这个表达式实质上就是所谓余弦定理,因此余弦定理不过是毕达哥拉斯定理的一个很好的推广.

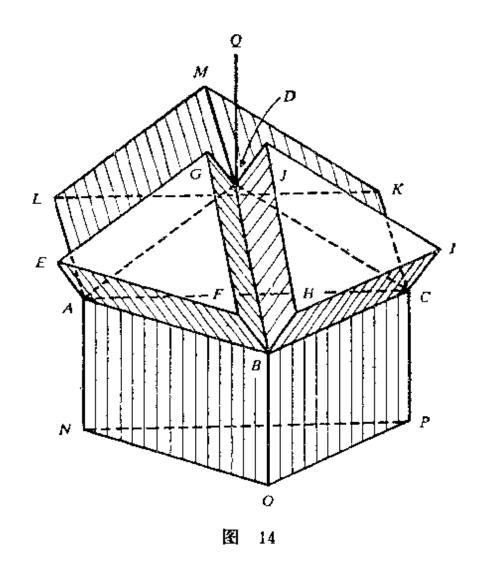
但是,毕达哥拉斯定理的一个或许是最值得注意的推广可以追溯到古希腊时代,是亚历山大里亚的帕普斯(Pappus,大约公元前300年)在他的《数学汇编》(Mathematical Collection)一书第四卷的开头给出的。帕普斯的推广如下所述:设 ABC 是任何三角形,CADE和CBFG是在两边CA和CB外侧所画的任何两个平行四边形。设DE和FG相交于点H,作AL和BM与HC平行且相等。这时,平行四边形 ABM L的面积等于平行四边形CADE和CBFG的面积之和。证明是很容易的,因为我们有CADE=CAUH=SLAR和CBFG=CBVH=SMBR,所以CADE+CBFG=SLAR+SMBR。我们看到,毕这哥拉斯定理已经从两方面作了推广,即把其中的直角三角形换成任何三角形,以及把两直角边上的正方形换成任何平行四边形。

一些中学生对于帕普斯的这个推广会很感兴趣,可以把它的证明留给学生作为练习。更有才能的学生可能愿意尝试一下,自己来把帕普斯的结果再进一步推广(推广到三维情况)。设ABCD是任何四面体(见图14),ABD-EFG, BCD-HIJ和 CAD-KLM是在ABCD的三个面ABD, BCD和CAD的外侧所作的任何三个三棱柱。设Q是平面EFG, HIJ和KLM的交点,作三棱柱, ABC-NOP,使它的三个棱AN, BO和CP与QD平行且相等。这时,ABC-NOP的体积等于ABD-EFG, BCD-HIJ, CAD-KLM的体积之和它的证明与上面给出的对于帕普斯推广的证明是类似的。



最后,我们不加证明地叙述在三维空间中与毕达哥拉斯定理类似的一个定理,通常称为德加定理*,我们首先给出某些定义。在一个四面体中,如果构成某一个三面角的三个平面角都是直角,则这个四面体称为直角四面体,而这个三面角称为四面体的直角,与这个直角相对的面,称为直角四面体的底面。现在,德加定理可以叙述如下。直角四面体的底面面积的平方,等于其他三个面的面积的平方之和.我们把这个定理的证明留给勇攀高峰的读者.

^{*} 因J. P. de Gua de Maives (1712—1785)而得名。他于1783年向巴黎科学院提出这个定理。但是R.笛卡儿 (Descartes, 1596—1650)和与他同时代的J·福尔阿巴 (Faulhabar, 1580—1635)早已知道。这个定理是坦索 (Tinseau)于1774年向巴黎科学院提出的更一般的定理的一个特殊情况。



随着人们对于空间探索的兴趣和在宇宙的其他部分生活的可能性的不断增加,有人提出这样的建议:在地球上建造一个大型装置,以便向可能会来的地外观察者表明地球上存在有智慧的生命。最适当的装置看来是一个象征毕达哥拉斯定理的巨大图形,可以设在撒哈拉大沙漠、苏联的西伯利亚或者其他广阔的荒原上。因为一切有知识的生物都必定知道欧几里得几何学中的这个非凡定理,所以用它做标志最容易被外来者所识别。

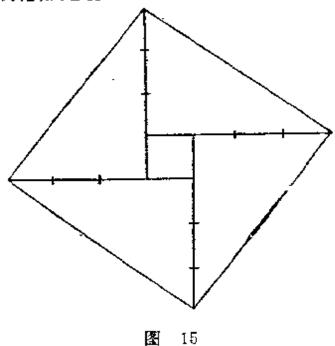
尼加拉瓜在1971年发行了一套纪念邮票,主题是世界上的"十个最重要的数学公式"。每一张邮票上都印着一个特定的公式,并附有一个适当的图案,在邮票背面用西班牙文对这个公式的重要性做了简要的说明。其中有一张是为纪念毕达哥拉斯关系式

"a²+b²=c²"而设计的. 科学家特别是数学家看到这些公式受到人们如此推崇,必定会感到无限欣慰,因为这些公式对于人类发展所起的作用,肯定要比在邮票上经常出现的许多国王和总统的作用大得多.

习 题

- 4.1 给定两个具有公共的底和相等的高的平行 四 边形,试通过证明它们是相加全等或相减全等的,来证明它们的面积相等.(这就是欧几里得在《原本》第一卷的命题35中所用的方法.)
- 4.2 试证明:任何三角形同长度为它的最长边、面积与它相等的矩形是相加全等的:
- 4.3 试补充或许是由毕达哥拉斯本人给出的毕达 哥拉斯定理分割证明法的细节·
- 4.4 试补充由(1)H.珀里加尔,(2)H.E.杜登尼,(3)L.达·芬奇给出的毕达哥拉斯定理分割证明法的细节。
- 4.5 (a)有些研究报告表明: 古埃及测量员使用一条被11个结点12等分的绳子,构造一个边长为3、4、5的三角形,这样来确定直角:试证明这种方法是正确的:
- (b) 因为没有证据说明古代埃及人已经知道 毕 达 哥 拉斯定理,即使是它的特殊情况,所以可以提出下述纯学术性问题: 试不利用毕达哥拉斯定理、它的逆定理、以及它的任何推论,证明边长为 3、4、5 的三角形是直角三角形.
- 4.6 正文中已经讲到帕普斯的结果向三维空间的推广,试补充其证明.
- 4.7 在一个直角四面体中,构成直角的三个棱称 为 它的直角棱,由直角的顶点向底面所引的垂线称为它的高。
- (a) 直角四面体的各直角棱的倒数的平方和,等于高的倒数的平方.

(b) 试证明德加定理.



4.8 试证明 Tâbit ibn Qorra 给出的毕达哥拉斯定理的下述推广:如果三角形ABC是任意三角形,B'和C'是BC 上的两点,使 得 $\angle AB'B = \angle AC'C = \angle A$,则 $(AB)^2 + (AC)^2 = BC(BB' + CC')$.

试证明: 当ZA是直角时,这个定理就成为毕达哥拉斯定理.

- 4.9 对于直角边为 a 和 b、斜边为 c 的球面直角三角形, 试建立毕达哥拉斯关系式, 这里 a, b, c 以球的半径为度量单位.
- 4.10 试陈述和证明毕达哥拉斯定理的逆定理. (这是欧几里得《原本》第一卷的最后一个命题,即命题48.)

参考文献

BOLTYANSKII, Equivalent and Equidecomposable Figures, tr. by A. K. Henn and C. E. Watts. Boston: D. C. Heath, 1963.

HEATH, T. L., History of Greek Mathematics. 2 vols. New York: Oxford University Press, 1931.

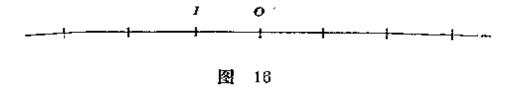
LOOMIS, E. S., The Pythagorean Proposition, 2nd ed. Ann Arbor, Mich: privately printed, Edwards Brothers, 1940.

第 5 讲

第一次危机的降临

当我们从幼年时代逐渐长大时,首先遇到的一些数就是所谓自然数,即正整数: 1, 2, 3···. 这些数是 在 计数各种有限集合所含对象的过程中产生的抽象结果. 后来,我们认识到,在日常生活中我们不但需要计数单个对象,而且还需要测量各种量,例如长度、重量和时间. 为了满足这些简单测量的需要,我们还必须使用分数,因为,例如一个长度,恰好包含预先选定的长度单位整数倍的情况是很少出现的. 我们还发现,对于某些测量,例如记录很低的温度,使用零、负整数和负分数是 很 方 便 的 . 于是,我们的数系扩充了. 但是,如果我们把一个有理数定义为两个整数之比P/q, 4≠0,那么这个有理数系就包括一切整数和一切分数,所以它就能完全满足一切实际测量的需要.

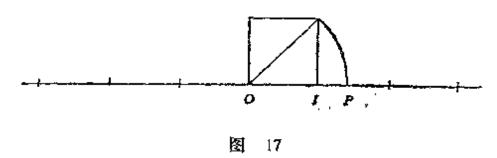
有理数具有一种简单的几何表示法,在一条水平直线上,确定两个不同的点O和I(见图16),I在O的右方,取线段OI作为长度单位,设O和I分别表示数0和1,这条直线称为数轴。这时,正整数和负整数能够用数轴上间隔为单位区间的一些点来表示。正整数在O的右方,负整数在O的左方。至于分母为 q的分数,则可用把每一个单位区间分成 q等分的那些分点来表示。所以,每一个有理数对应着数轴上的唯一的点。在早期的数学家看来,有理数对应的点充满了整个数轴,现在尚未深入了解数轴性质的人也的确会这样认为,通常的感觉也是如此。



因此, 当发现在数轴上存在不与任何有理数对 应 的 一些点

时,在人们的心理上必定会引起极大的震惊,这个发现是早期希腊人的重大成就之一,它是在公元前五世纪或六世纪的某一时期由毕达哥拉斯学派的成员首先获得的,这当然是数学史上的一个里程碑。

特别是,毕达哥拉斯学派发现,没有任何有理数能与数轴上的这样一点 P相对应(图17):距离 OP 等于边长为单位长度的正方形的对角线.后来,又发现数轴上还存在许多点,也不对应任何有理数.因此,必须发明一些新的数,使之与这样的点相对应;因为这些数不能是有理数,所以就把它们称为无理数.



因为根据毕达哥拉斯定理,边长为1的正方形的对角线长度等于 $\sqrt{2}$,所以为了证明上述点P不能由一个有理数来表示,只须证明 $\sqrt{2}$ 是无理数即可.为此,我们首先注意到:对于一个正整数 s,当且仅当 s 是偶数时, s^2 是偶数.为了进行论证,现在假设 $\sqrt{2}$ 是有理数,即 $\sqrt{2} = p/q$,其中 p 和 q 是互素的整数"。于是

$$p = q\sqrt{2}$$

肕

$$p^2 = 2q^2$$

因为 p^2 等于一个整数的二倍,所以 p^2 必须是偶数,因而p也必须是偶数,设p=2r,这时上面最后一个等式变成

$$4r^2=2q^2,$$

¹⁾ 如果两个整数没有不等于1的正的公因子,则称它们为互素的.例如,5和18是互素的,而12和18不是互素的.

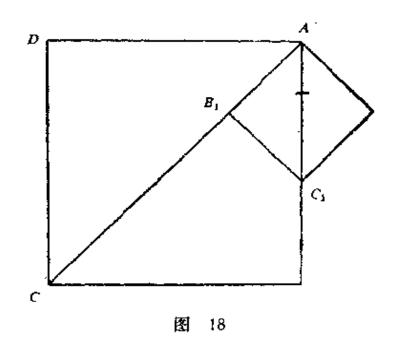
由此可知, q^2 因而 q 也必须是偶数. 但是,这是不可能的,因为已经假设 p 和 q 是互素的. 这样,假设 $\sqrt{2}$ 是有理数导致矛盾,因此必须放弃这个假设.

上面介绍的关于 $\sqrt{2}$ 的无理性的证明,实质上就是亚里士多德(Aristotle,公元前380—322)给出的传统证明,据柏拉图(Plato,427—347)所说,继证明 $\sqrt{2}$ 是无理数以后,施乐尼的泰奥多勒斯(Theodorus of Cyene,公元前约425年)又证明了 $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{17}$ 也是无理数.

发现存在无理数,推翻了早期希腊人坚持的 另一个 直观信念:给定任何两个线段,通常的感觉是:必定能够找到第三个线段,也许很短,使得给定的两个线段都包含这个线段的整数倍.事实上,即使是现代人,也会这样认为,如果他还不知道情况并非如此的话。但是,现在我们取一个正方形的边 s 和对角线 d 作为这两个线段;如果存在第三个线段 t,使得 s 和 d 都包含 t 的整倍数,那么我们就有 s=qt 和 d=pt,这里 p 和 q 是正整数。但是 $d=s\sqrt{2}$,因此, $pt=qt\sqrt{2}$,也就是说, $p=q\sqrt{2}$,即 $\sqrt{2}=p/q$,这是一个有理数。因此,与直观相反,存在不可公度的线段,即不具有共同度量单位的线段。

现在,我们大概介绍一下证明 $\sqrt{2}$ 的无理性的一种几何方法,即证明正方形的边和对角线是不可公度的。假设情况相反,那么就存在一个线段AP(见图18),使得正方形ABCD的对角线AC和边AB都是AP的整数倍,也就是说,AC和AB关于 AP 是可公度的。在AC上,截取 $CB_1=AB$,作CA的垂线 B_1C_1 。不难证明 $C_1B=C_1B_1=AB_1$ 。于是, $AC_1=AB-AB_1$ 和 AB_1 关于AP是可公度的。但是, AC_1 和 AB_1 是尺寸比原来的正方形的一半还要小的一个正方形的对角线和边。由此可知,重复上述过程足够多次,最后我

们就能得到一个正方形,它的对角线AC"和边AB,关于 AP 是 可公度的,并且AC"《AP"。这是矛盾的,于是定理得证。

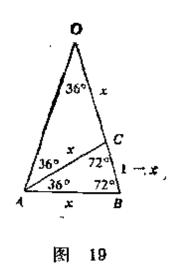


我们注意到.上面给出的关于√2的无理性的证明,都应用了间接证法即归谬法.著名的英国数学家 G. H. 哈代 (Hardy, 1877—1947)对于这种证明方法做过一个令人满意的评论.在棋类比赛中,经常采取的一种策略是"弃子取势"——牺牲一些棋子以换取优势。哈代指出:归谬法"是远比任何棋术 更 为优越的一种策略,棋手可以牺牲的只是几个棋子,而数学家可以牺牲的却是一盘棋"¹¹、归谬法就是作为一种可以想象的最了不起的策略而产生的.

有趣的是,当古代几何学家试图作正五边形时,就曾遇到过一个无理数.他们很容易作出正三边形和正四边形(即等边三角形和正方形),当然,作正六边形也并不难.但是,作正五边形,情况则大不相同.为了作正五边形,只要能作一个36°的角即可,因为这个角的二倍(即72°的角)是圆内接正五边形 一边所对的圆

¹⁾ G. H. Hardy, A Mathematician's Apology. New York: Cambridge University Press, 1941, p. 34.

心角·如果在一个等腰三角形中,底角等于顶角的二倍(图19),那么它的底角是72°,顶角是36°,于是问题化为作一个这样的等腰三角形。在图19中,设AC平分底角OAB。这时,OC=AC=AB,三角形BAC与三角形 AOB 是相似的。取OA=1,设AB=x,于是我们有AB/BC=OA/AB,x/(1-x)=1/x,



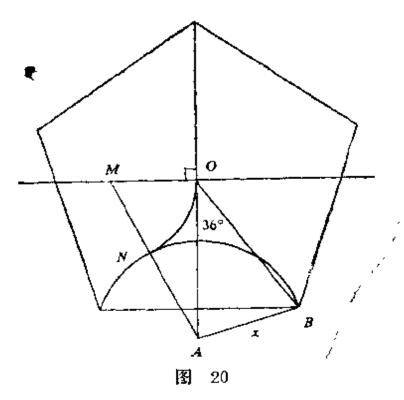
即

$$x^2 + x - 1 = 0$$
.

由此得到 $x=(\sqrt{5}-1)/2$. 不难作出这个 x, 如图20所示, 其中 OA=1, MO=1/2, 因而 $AM=\sqrt{5}/2$, 以及

$$AB = AN = AM - MN = (\sqrt{5} - 1)/2 = x.$$

现在,很容易作出这个圆内接正五边形。



如果一个线段 OB (正如图 19 中的OB) 被一点 C 分为两个线

段,使得较长的线段OC是较短的线段CB和整个线段OB的比例中项,即

$$CB/OC = OC/OB$$
,

那么,希腊人就说线段 OB 被分成黄金分割.上面已经证明,如果 x 表示比CB/OC或OC/OB,则 $x=(\sqrt{5}-1)/2$.他们把这个数,或者它的倒数

$$y=1/x=(\sqrt{5}+1)/2\approx 1.618$$

称为黄金比,这个比值在自然界中,以及在科学和艺术中,处处都会出现.

以后,在第十五讲中,我们还要对出现黄金比的各种情况进行评论.这里,我们仅仅指出,一些心理测验表明这样一个事实:对于大多数人来说,宽与长之比等于黄金比x的长方形,看起来最顺眼.这个长方形称为黄金长方形,它在J.汉比奇(Hambidge)等人热衷研究的一种所谓"动态匀称"的艺术手法中具有重要意义.黄金比和黄金长方形在希腊建筑和希腊陶器中经常会见到,而且还被应用于雕塑、绘画、建筑设计、家具设计以及图案显示等方面.一些艺术家,例如著名的美国画家G.贝洛斯(Bellows),在他们的工作中已广泛运用了动态匀称原理.

在发明小数以后,有理数与无理数之间的基本差别就变得十分明显了.不难证明,任何有理数都具有一个有限的或循环的小数表达式,反之,任何有限的或循环的小数表达式都表示一个有理数.例如,7/4=1.75,47/22=2.1363,其中63上面的横线表示这两个数字无限地重复出现.因此,无理数的小数表达式是无限不循环的,反之,任何无限不循环小数表达式都表示一个无理数.

有理数和无理数的小数表达式之间的这种差别,对于证明有理数和无理数的某些性质是很有用的。例如,假如我们想要证明在任何两个不同的正无理数之间都存在一个有理数。用a和b(o<

4<b)来表示这两个无理数,设它们的小数表达式为

 $a = a_0 \cdot a_1 a_2 \cdots$ $a_1 a_2 \cdots a_n b_n b_1 b_2 \cdots$

设:是使得 $a_n \neq b_n$ (n=0,1,2,...)的第一个 n 值. 于是,

$$c = b_0 \cdot b_1 b_2 \cdots b_d$$

就是 a 和 b 之间的一个有理数.

有理数和无理数合称为实数.一个实数,如果在它的小数表达式中十个数字以相同的频率出现,那么它就称为简单正规数;如果一切长度相等的数字节都以相同的频率出现,那么它就称为正规数.例如,人们相信(但尚未证明),π, θ 和√2 都 是 正规数.为了用统计方法证明这些数的正规性,已经把它们的小数表达式计算到很多位.

1967年,英国数学家使用电子计算机计算的 小 数 表 达式达 100,000位. 1971年哥伦比亚大学的J. 达特卡(Dutka)计算√2 超 过一百万位,花费47.5机时,电动打字机正确地输出√2 的小数 表达式至少到1000082位,打印200页,每页包含5000个数字. 这 是目前已经算出的一个无理数的最长的近似值。

习 题

- 5.1 (a) 试补充本讲中简单介绍的√2的无理性的 几 何证明的细节,
- (b) 作一个60°—30°的直角三角形,从 30°角的顶点起,在 斜边上截取一段,使之等于较长的直角边,过截 点 作 斜 边的垂 线.试利用这个图形,给出√3的无理性的几何证明。
- 5.2 (a) 试证明: 过点(0,0)和 $(1,\sqrt{2})$ 的直线,除了(0,0)以外,不再通过其他坐标格点.
 - (b) 说明如何利用坐标格点求√2的有理近似值.
- 5.3 如果 ρ 是素数, n 是大于 1 的整数,试证明 $\sqrt[7]{\rho}$ 是 无理数。

- 5.4 (a) 试证明 log₁₀2是无理数.
- (b) 把(a)推广,证明 $\log_a b$ 是无理数,这里假设 a 和 b 都是正整数, a > 1, a(或b)包含的一个素因数不包含在b(或a)中.
 - 5.5 (a) 试证明: 一个有理数与一个无理数之和是无理数.
 - (b) 试证明: 一个有理数与一个无理数之积是无理数.
- 5.6 (a) 毕达哥拉斯的秘密团体的标志是一个 五角星,连接正五边形的五条对角线而成,试证明,五角星的每一条边都把另外两条与其相交的边分成黄金分割。
- (b) 设点G 把线段 AB 分成黄金分割,其中 AG 是较长的一段.在AG上截取AH=GB,试证明。点H 把AG分成黄金分割。
- (c) 试证明,从一个正方形中割去一个黄金长方形,剩余的部分也是一个黄金长方形.
- (d) 试证明: 取5/8作为黄金比 $x = (\sqrt{5} 1)/2$ 的过 剩 近 似值, 其误差不超过3%.
 - (e) 设 x 是黄金比($\sqrt{5}-1$)/2, 试证明

$$x = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} = \cdots$$

- 5.7 (a) 给定正五边形的一个边, 使 用 直尺和圆规作这个正五边形。
- (b) 给定正五边形的一个对角线,使用直尺和圆规作这个正五边形.
 - (c) 使用直尺和圆规作正十五边形.
- (d) 假设 r 和 s 是互素的正整数,而且正 r 边形和正 s 边形是可用直尺和圆规作出的,试证明,正 r s 边形也是可用直尺和圆规作出的.
- (e) 试证明欧几里得《原本》第10卷的命题皿,内接于同一圆的正五边形的一边、正六边形的一边和正十边形的一边,构成一个直角三角形的三个边。

- 5.8 (a) 试证明: 有理数的小数表达式或者 是有限的,或者是循环的.
- (b) 试证明,任何有限的或循环的小数表达式都表示一个有理数,
 - (c) 试求其小数表达式为3.239的有理数.
 - 5.9 (a) 试证明

0.101001000100001...

是无理数,其中两个相邻的1之间0的个数每次增加一个.

(b) 试证明

0.12345678910111213---

是无理数, 其中小数表达式是由相继的正整数所组成,

- 5.10 (a) 试证明: 在任何两个不同的有理数之间都存在无 穷多个有理数.
- (b) 试证明: 在任何两个不同的有理数之间都存在无穷多个 无理数:
- (c) 试证明, 在任何两个不同的无理数之间都存在无穷多个有理数.
- (d) 试证明: 在任何两个不同的无理数之间都存在无穷多个 无理数:

参考文献

HAMBIDGE. Jay. The Elements of Dynamic Symmetry. New York: Dover Publications, 1967.

HEATH. T. L., History of Greek Mathematics, 2 vols. New York: Oxford University Press, 1931.

HUNTLEY. H. E.: The Divine Proportion. a Study in Mathematical Beauty. New York: Dover Publications. 1970.

第 6 讲

第一次危机的消除

无理数和不可公度量的发现,在毕达哥拉斯学派的成员之间 引起了极大的震动,首先,这是对毕达哥拉斯哲学思想的核心, 即"万物皆依赖于整数"的致命一击──既然像√2这样的一个无 理数不能写成两个整数之比,那么它究竟怎样依赖于整数呢?其 次,这与通常的感觉相矛盾,因为人们在直观上总是认为任何量 都能用一个有理数来表示,在几何上相应的情况同样令人不可思 议,因为也与直觉相反,存在着一些没有共同度量单位的线段。 但是,毕达哥拉斯学派的整个比例和相似形理论都是建立在这样 一个假设的基础之上的,任何两个线段都是可公度的,即具有一 个共同的度量单位,毕达哥拉斯学派一直认为已经确立的几何学 的大部分内容,突然之间必须抛弃,因为它们的证明失效了、数 学基础的严重危机爆发了.这个"逻辑上的丑闻"如此可怕,以致 于毕达哥拉斯学派尽一切可能保守秘密,据说米太旁登的希帕苏 斯(Hippasus of Metapontum, 公元前五世纪) 把这个秘密泄露出 去了、结果被抛进大海、或者根据另一种说法、被驱逐出毕达哥 拉斯学派,并为他立了一个墓碑,就好像他已经死了.

现在,让我们通过一个例子来说明早期的毕达哥拉斯学派是怎样确信他们已经证明了关于三角形面积的一个基本命题的.

定理·如果两个三角形的高相同,则它们的面积之比等于两底之比。

早期毕达哥拉斯学派的证明,考虑两个三角形ABC和ADE,它们的底BC和DE处于同一直线 MN上,如图21所示。我们想要证明

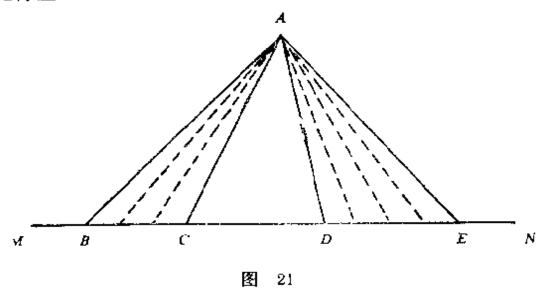
 $\triangle ABC: \triangle ADE = BC:DE$.

两底BC和DE具有一个共同的度量单位(因为早期的毕达哥拉斯

学派相信任何两个线段都是可公度的).设 BC 和DE分别包含这个单位的 P 倍和 q 倍。在BC和DE上画出这些分点,并且把它们与顶点 A 相连接、这时,三角形ABC和 ADE 被分别划分成 P 个和 q 个小三角形,这些小三角形具有共同的高和相等的底,因此根据以前证明的结果,它们的面积相同。由此可知

 $\triangle ABC: \triangle ADE = p:q = BC:DE$,

定理得证.



但是,后来发现,两个线段不一定是可公度的,因而上述证明以及许多其他证明都不再适用,使人烦恼的"逻辑上的丑闻"发生了.

这个"逻辑上的丑闻"是数学基础的第一次危机,它既不容易又不能很快地消除.最后,大约在公元前 370 年,才华横溢的希腊数学家欧多克斯(Eudoxus)以及柏拉图和毕达 哥拉斯的学生阿契塔(Archytas)给出比例即两个比相等的定义, 从而巧妙地消除了这一"丑闻",他们给出的定义与所涉及的量是可公度的还是不可公度的完全无关.这个定义是数学史上的一个里程碑,可以叙述如下:

所谓四个量成等比,即第一个量与第二个量之比等于第三个量与第四个量之比,是指,当取第一、第三两个量的任何相同的

倍数,并取第二、第四两个量的任何相同的倍数时,前两个量的倍数之间的小于、等于或大于的关系是否成立,取决于后两个量的倍数之间的相应关系是否成立。

这个定义叙述起来比较复杂,实际上是很简单的,它不过是说:设A,B,C,D是任何四个量,其中A和B是同类的(两个线段、两个角、两个面积或两个体积),C和D是同类的,如果对于任何两个正整数m和n,关系

 $mA \ge nB$

是否成立,相应地取决于关系

 $mC \ge nD$

是否成立,则称A 与 B之比等于C 与 D之比。

现在,让我们应用欧多克斯的比例定义来重新证明上面考虑 过的命题。

定理,如果两个三角形的高相同,则它们的面积之比等于两 底之比,

欧多克斯的证明. 在 CB 的延长线上(见图22),从点 B 起,相继地截取m-1个与CB 相等的线段,把分点 B_2 , B_3 …, B_m 与顶点 A 相连接. 同样地,在 DE 的延长线上,从点 E 起,相继地截取n-1个与DE 相等的线段,把分点 E_2 , E_3 ,…, E_n 与顶点 A 相连接. 这时,

 $B_mC = m(BC), \triangle AB_mC = m(\triangle ABC),$ $DE_n = n(DE), \triangle ADE_n = n(\triangle ADE).$

根据以前证明的结果, 可知

这也就是

 $m(\triangle ABC)$ $\geq n(\triangle ADE)$ 取决于m(BC) $\geq n(DE)$,因此(根据欧多克斯的比例定义)

 $\triangle ABC: \triangle ADE = BC:DE$,

定理得证:

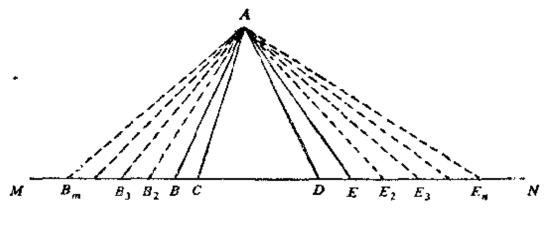


图 22

在上述证明中,并没有提到可公度量和不可公度量,因为欧多克斯的定义对于两种情况同样适用.早期毕达哥拉斯学派遇到的"逻辑上的丑闻"已被巧妙地避免了.

后来,大约在公元前 300 年,欧几里得在他的著名的《原本》的第五卷中,对于欧多克斯的比例理论做了很好的解释。捷克斯洛伐克的B.布尔查诺(Bolzano, 1781—1848) 在世时是一个不受欢迎的牧师,也是一个不被重视的数学家,他讲过关于他本人的一个有趣的小故事,其中欧几里得及其《原本》起了医生的作用。波尔查诺曾在布拉格度假,那时他正在生病,浑身发冷,疼痛难忍。为了分散注意力,他拿起了欧几里得的《原本》,第一次阅读第五卷中的关于欧多克斯的比例理论的精彩论述。他说,这种高明的处理方法使他无比兴奋,以致于从病痛中完全解脱出来。后来,当他的任何朋友生病时,他总是作为一个治疗妙方,推荐阅读欧几里得解释的欧多克斯的比例理论。

直到现在,在讲授平面几何和立体几何的某些命题时,对于不可公度的情况,仍然会感到困难.鉴于欧多克斯的方法过于抽象,初学者不易理解,许多中学教科书的作者在证明某些命题时,分两种情况处理:对于可公度的情况,采用早期毕达哥拉斯学派的方法,对于不可公度的情况,利用简单的极限概念.有时把不可公度的情况放在附录里,是否讲授,由教师来决定,有时则完全略去,因为已经超出中学课程的严格性的范围.目前,在

大多数中学数本中,为了处理不可公度的情况,另作一些补充假设,例如假设学生已经全面了解实数系及其基本性质.

٠.

现在,让我们再来考虑前面讨论过的那个命题,并且借助于 某些极限概念来处理不可公度的情况,特别是,我们将利用极限 理论中的一个很容易接受的基本定理,如下所述:

基本极限定理 如果两个变量总是保持相等,并且各趋向于一个极限,则这两个极限相等.

现在,我们来考虑难以处理的不可公度的情况.

定理 如果两个三角形的高相同,则它们的面积之比等于两 底之比.

不可公度的情况。假设在图23中, BC和DE是不可公度的。 我们想要证明

 $\triangle ABC: \triangle ADE = BC:DE$.

把BC分成n等份,BR是其中的一份。在DE上相继地截取与BR相等的一些线段,最后达到点F,使得FE<BR。根据可公度情况的结果(假设已经用早期毕达哥拉斯学派的方法证明了),有

 $\triangle ABC: \triangle ADF = BC:DF$.

现在, $\Diamond n \rightarrow \infty$. 于是 $DF \rightarrow DE$, $\triangle ADF \rightarrow \triangle ADE$, 因此 $\triangle ABC$ / $\triangle ADF \rightarrow \triangle ABC$ / $\triangle ADE$, BC/ $DF \rightarrow BC$ /DE. 由此, 极 据 基

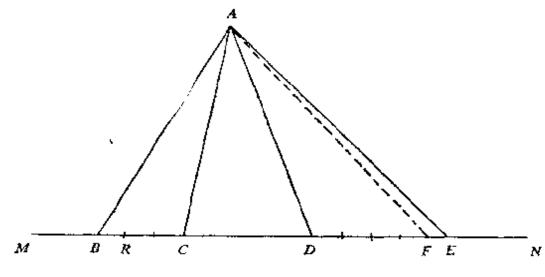


图 23

本极限定理, 可知

 $\triangle ABC: \triangle ADE = BC: DE$,

不可公度的情况得证.

上述证明利用了这样一个事实: 任何无理数都可以看作一个有理数序列的极限: 这是G. 康托 (Cantor, 1845—1918) 建立的一个严格的现代方法:

许多人建议,在中学的论证几何中介绍上面举例说明的这种简单的极限方法。因为首先,理解极限概念需要时间,使学生在一些重要场合及早地、反复地接触这个概念,效果较好。其次,极限理论在面积和体积的几何研究中是非常重要的。最后,在中学阶段使学生了解一些极限理论,作为进一步学习微积分的准备,这对于大学数学学习也是很有益的。虽然还有一些研究初等几何的方法也不必考虑可公度情况和不可公度情况,但是极限理论在几何学中处处都要用到。特别是,在学习几何学时,我们发现有许多几何概念,它们的定义都需要极限思想,例如曲线的长度,曲线的切线。

在下一讲中,我们将会看到一些现代结果,至少在数学所涉及的范围内,是如何证实毕达哥拉斯的哲学思想——"万物皆依赖于整数"的. 我们还会看到,一种建立实数系的现代方法是借助于所谓戴德金分割,这在很大程度上就是欧多克斯比例理论的算术化的结果。

习 题

- 6.1 考虑命题:同一圆中两个圆心角之比等于它们所对圆 弧之比·
- (a) 试按照毕达哥拉斯的方式,证明两个圆心角为可公度的情况。
 - (b) 试采用欧多克斯的方法,统一证明可公度和不可公度两

种情况:

- (c) 试借助于简单的极限概念,证明不可公度的情况,
- 6.2 (a) 试应用毕达哥拉斯的方法并借 助 于 极 限 概 念,证明,与三角形一边平行的直线,把另两边分为成比例的四个线段.
 - (b) 试由本讲中证明的命题推导上述命题,
- 6.3 试应用毕达哥拉斯的方法并借助于简单的极限概念,证 明下列命题,
- (a) 如果两个矩形的高相同,则它们的面积之比等于两底之比。
 - (b) 两个二面角之比, 等于它们的平面角之比,
- (c) 如果两个长方体的底面金等,则它们的体积之比等于两高之比。
- 6.4 极限概念有三个要点必须 注 意:如果 k 是实变量 x 的极限,则(1) k 为常数;(2) x 与 k 之差的绝对值终将小于预先指定的无论多么小的正数h;(3) x 与 k 之差此后将永远保持小于指定的正数h;

设处于同一直线上的三点 A, B, C, 表示沿某 一 铁路线的三个车站,B 在 A 与 C 之间,列车 T 由 A 向 C 运行,T 与 A 之间的距离为x. 根据上述极限的三个条件,回答下列问题:

- (a) 如果列车T由A出发向C运行,最后到达C,那么我们是否可以说 $\lim x = AB$?
- (b) 如果列车 T由 A 出发,只要到达 B 就停止运行,那么我们是否可以说 $\lim x = AC$?
- (c) 假设货车 F 从 A 出发向 C 运行, F 与 A 的距离为变量y,在 F 开出以后,过了一会儿,客车 T 从 A 出发,在平行的轨道上运行,追上 F ,并以与 F 相同的速度,与 F 并排行驶,那么我们是否可以说 $\lim x = y$?
 - (d) 如果列车T从A出发,以均匀的速度运行,最后到达终

点 C,那么我们是否可以说 $\lim x = AC$?

- (e) 假设列车 T 从 A 出发,以逐渐减小的速度向 C 运行,第二一个小时经过从 A 到 C 的路程的一半,第二个小时经过剩余的路径的一半,第三个小时又经过剩余的路程的一半,这 样继续下去,我们是否可以说 lim x = A C?
 - 6.5 试证明基本极限定理.
- 6.6 (a) 已知如何度量直线段的长度,试问如何定义圆周的长度?
 - (b) 已知如何度量多边形的面积, 试问如何定义圆的面积?
- 6.7 设 P_* 和 A_* 分别表示外切于直径为1的圆的正n边形的周长和面积,试求 $\lim P_*$ 和 $\lim A_*$.
- 6.8 试利用极限概念,定义: (a)过曲线上某一点的曲线的切线,(b)过曲面上某一点的曲面的切平面.
- 6.9 (a) 已知棱锥的体积等于它的底面面积 与它的高乘积的三分之一,试问如何利用极限概念推导圆锥体积的公式?
- (b) 已知正棱柱的侧面面积等于它的底面 的 周 长 乘以它的高,试问如何定义直圆柱的侧面面积?

过去人们认为,可以把直圆柱的侧面面积定义为任何内接多面体表面面积序列的极限,如果多面体的面数无限增加,而且最大面的面积趋向于零.1880年,H.A.施瓦兹(Schwarz,1843—1921)在一封信中指出情况并非如此,这使得当时的数学家大为惊奇.施瓦兹给出的例子很难理解,以致于人们把它称为施瓦兹悖论¹⁾.

6.10 在初等微积分课本中,函数f(x)在点 x_1 的导数的几何解释是y=f(x)在点 (x_1,y_2) 处的斜率,试考察之.

参考文献

HEATH, T. L., History of Greek Mathematics. 2 vols. New York, Oxford University Press, 1931.

ZAMES, FRIEDA, "Surface area and the cylinder area paradox,"

Two-Year College Mathematics Journal. Sept. 1977, pp.205-211.

第 7 讲

数学条理化的第一步

在泰勒斯(公元前600年)以后的三百年间,希腊人在数学上取得了辉煌的成就。毕达哥拉斯等人不仅大大地发展了初等几何和数论,而且还产生了关于无穷小量和求和法的一些思想,这些思想在十七世纪被发扬光大而成为微积分.此外,他们还发展了更高深的几何学,即(比直线和圆复杂的)曲线和(比平面和球面复杂的)曲面的几何学。有趣的是,这种高深的几何学的大量成果竟然是在设法解决古代三大数学难题一倍立方、三等分任意角和化圆为方一的过程中得到的,尽管三大难题本身并未解决。这说明了一个重要原理:存在尚未解决的数学难题,可以促进数学的发展。

但是,在这三百年间希腊数学的最大成就,或许可以说是希腊人形成了这样一种观念:一个合乎逻辑的学科,应当是由一组在开始研究这一学科时假设可以接受的原始命题(陈述)出发,通过演绎推理而得到的一系列命题,当然,在表达由演绎法进行的一个论证时,这个论证中的任何命题都必须由前面的一个或几个命题推导出来,而前面的一个命题本身又必须由更前面的一个或

几个命题推导出来. 因为不能这样无限地追溯下去,又不能造成逻辑上的循环,即由命题 p 推出命题 q,又由命题 q 推出命题 p,所以在开始研究这一学科时,我们必须确定一组原始命题,读者应当承认它们是正确的,然后,完全由演绎推理来导出这一学科的其他所有命题.

原始命题和导出命题都是关于这一学科的学术内容的陈述, 因此都需要使用一些专门的术语,这些术语需要定义。因为一些 术语必须由另一些术语来定义,而这另一些术语又必须由另外一 些术语来定义,所以我们面临的困难同建立这一学科的命题时遇 到的困难是类似的。为了着手定义术语,并且避免循环定义,即 由术语 x 来定义术语 y,又由术语 y 来定义术语 x,所以 在 开始 研究这一学科时,我们必须确定一组基本术语,并且对于它们的 用法予以解释。然后,借助于已经引入的术语仔细定义这一学科 的其他所有术语。

根据希腊人的观念,一个合乎逻辑的学科应当按照下述方式。 来展开.

实质公理体系的模式

- (A)对于一个学科的某些基本术语予以解释,目的是使读者 了解这些基本术语的含义是什么.
- (B)列出关于基本术语的某些原始命题,读者根据基本术语的含义便可承认这些命题是正确的,这些原始命题称为这一学科的公理或公设。
 - (C)借助于已经引入的术语定义这一学科的其他所有术语,
- (D)由已经承认或已经证明的命题,通过逻辑推理导出这一 学科的其他所有命题。

现在人们把按上述方式形成的学科, 称为依实质公理体系而 建立起来的, 当然, 早期希腊入对于数学的最杰出的贡献, 就是

Z

确立实质公理体系的模式和主张按照这种 模 式 使 数学条理化. "根据公理体系来建立数学"这一概念的产生,肯定是数学史上一个最重要的里程碑.

为了对实质公理体系的模式有点感性认识,让我们来考虑一个例子,虽然这个例子看来很简单,而且是虚构的,但是很有趣,能说明问题.

假设我们要研究的"学科"的基本术语是由某些人构成的一个 (有限非空)集合 S,以及由 S中的人形成的一些组合。按照希腊 人的公理体系的概念,我们首先向读者解释一下这些基本术语的 含义。所谓人,指的是 S中的任何男人、女人或儿童;所谓组合, 指的是由一些人为了某种目的而构成的(非空)子集。对于这些人 及其组合,我们将做如下假设:

公理! S中的每一个人至少是一个组合的成员.

公理2 对于S中的每两个人, 至少存在一个他们共同参加的组合.

定义 两个没有共同成员的组合, 称为共轭的组合

公理3 对于每一个组合,存在且仅存在一个共轭的组合.

关于我们所考虑的原始术语的上述三个字下加着 重点 的命题, 称为这一学科的公理或公设. 根据对于基本术语 所 做 的 解释, 读者不难接受这三个公理, 作为发展这一学科的出发点. 可以看出, 为了方便起见, 在叙述公理 3 之前, 我们先引人了一个定义.

现在,我们就可以由上面这一组公理,完全由演绎方法得出一些结论;我们仅仅推导四个结论.

定理1 S中的每一个人至少是两个组合的成员,

设 a 是 S 中的一个人,根据公理1,存在一个组合 A,使得 a 属于 A. 根据公理 3,存在一个与组合 A 共轭 的组合 B . 因为 B 是非空的,所以 B 至少有一个成员 b ,且 $b\neq a$. 根据公理2,存在一个组合 C ,使得 a 和 b 都属于 C . 因为 A 和 B 是 共轭的组合,所

以b不属于A,由此可知 $A \neq C$.于是,a属于两个不同的组合A和C。 定理 2 每一个组合至少包含两个成员。

设 A是一个组合 · 因为 A是非空的,所以 A至少有一个成员 a · 假设 a 是 A 的唯一成员 · 根据定理 · 存在一个与组合 A 不同的组合 B ,使得 a 也是 B 的成员 · 现在, B 必定还有另一个成员 $b \neq a$,否则 A 和 B 就不会是不同的 · 根据公理 3,存在一个组合 C ,使得 B 与 C 是共轭的 · 由此可知 A 也与 C 是共轭的 · 但是,这与公理 3 是矛盾的 · 因此,由归谬法定理得证 ·

定理3 8至少有四个人,

在证明定理1时,我们已经证明: S至少有两个不同的人 a和 b. 根据公理 2,存在一个组合 A,使得 a 和 b 都属于 A. 根据公理 3,存在一个与组合 A 共轭的组合 B ,但是,根据定理 2, B 必定至少有两个成员 C 和 d 。因为 A 和 B 是共轭的,所以可知 a , b , c , d 是 S 的四个不同的人 .

定理 4 至少存在六个组合.

在证明定理 3 时,我们已经证明:存在四个不同的人a, b, c, d, 其中 a 和 b 属于组合 A, c 和 d 属于组合 B. 由此可知,组合 C (包含 a 和 c),D (包含 c 和 b),E (包含 a 和 d) 和 F (包含 c 和 b)是都与 A 和 B 不同的、且彼此不同的四个组合,因此,至少存在六个组合。

有兴趣的读者可以设法证明下面一个较难的定理.

定理 5 任何组合的成员的个数都不多于两个.

由三个公理推导出来的 这些结果称为这个学科的定理、当然,还可以继续推出许多定理。

对于一个简单的游戏,也常常可以利用实质公理推衍出一套理论来,举例来说,我们考虑一下大家熟悉的"三子棋"(tic—tac—toe)",有关的术语包括:棋盘、圈、叉、嬴、平局等等,这些术

¹⁾ 三子棋为一种二人对局的儿童游戏,二人轮流在一有九个方格的棋盘上 回十字或圆圈,以所画之记号三个成直、横、斜线相连者为胜,——译岩注

语需加解释,或者说需要定义.然后可以把游戏的规则作为公设提出来,只要人们理解了其中的基本术语,这些规则是完全可以接受的.由这些规则出发,还可以进一步推导出有关本游戏的一些定理.譬如说,可以证明:先开始下棋的人,只要采取适当策略,便不会输棋.

对于公理方法的起源,存在两种为历史学家所承认的理论——进化论和革命论.进化论是公理方法出现以后几个世纪内的一些学者提出的传统理论,目前为大多数人所赞同.这种理论认为,公理方法是作为演绎法在数学中早期应用的自然发展和改进而逐渐产生的.一些较短的"演绎链"发展成较长的"链".几个"演绎链"连接在一起,形成一个更长的"链",从而得到一个中间的结果.后来,有人产生了这种真正伟大的思想.把这些"演绎链"一环一环地连接在一起,形成一条"长链"即由几个事先确定的假设出发,通过演绎推理而得到全部几何学。

有些古代数学史学家则不相信上述进化理论,他们认为古代传说大都是不可靠的。他们认为,数学发展中的这样一个重大转折,肯定是在一个紧要关头,即当人们清楚地认识到原始假设的重要性和完美性时突然发生的,结果使数学达到一个全新的成熟水平.如果情况确实如此,那么我们不难找到这个紧要关头,它就是由于发现无理数和不可公度量而引起的数学基础的严重危机。如果关于公理方法起源的这种革命理论是正确的,那么这种方法的出现则应归功于欧多克斯,当时消除上述危机的一位天才。

我们或许没有必要去揣测公理方法的起源,总而言之,在公 元前四世纪和三世纪之交,欧几里得正式应用了公理方法,这是 数学史上的重大事件,

最后我们指出,在二十世纪,希腊人的实质公理体系进一步 发展成为现在所谓的形式公理体系,这又是数学史上的一个里程 碑在后面一讲中还要详细介绍,但是,在公理方法的新、旧观点 之间,看来是有某些重大差别的.

习 题

7.1 一个合乎逻辑的学科的一个术语(除了原始术语以外)的定义,不过是已有的一些术语的一个复杂组合的略语。因此,通过定义引入的一个新的术语实际上是任意的,尽管方便,也可以完全不用;但是,如果不用,这个学科的表述就会复杂化。例如,我们考虑初等几何课本中的下述定义。(1)四边形的对角线是连接它的两对相对顶点的两个线段。(2)平行线是处于同一平面上的、沿两个方向无论延长多远也不相交的两条直线。(3)平行四边形是两对对边分别平行的四边形。

现在,不用上面这些加着重点的术语,重新叙述。命题:"平行四边形的对角线相互平分"。

7.2 在初等代数中,如果n表示一个正整数, k表示任何实数,那么我们把 k"定义为代表乘积(k)(k)…(k)的一个符号,其中因子 k 出现 n 次. 试不用指数,改写下列表达式,其中 a, b, c 都表示实数:

$$[(a+b)^{5}(a-b)^{3}].$$

7.3 试给出下列数学符号的通常的定义,并说 明 它们的方便之处:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

- (b) n! 其中 n 为正整数,
- (c) (型), 其中 m 和 n 为正整数, 且 m ≥ n.
- 7.4 利用适当的定义,把下面这句话简化 为 包含不到五个词的一句话:"照看房间的人员使带有四个腿的活动 椅子 恢复到正常状态"。
- 7.5 一部词典当然要靠循环定义,但是总是希望使用词典的人事先已经掌握一定数量的词汇,以便通过他所熟悉的词来定

义他还不熟悉的词.试在一部标准词典中查找对下列各词的解释,直到发现"循环链"为止: (a)死, (b)声音, (c)线(在数学意义下的).

- 7.6 试解释为什么说下面这句已经过时 但 还常听到的话能够反映希腊人的实质公理体系模式的部分内容: "公理 是 自明的真理."
- 7.7 使用本讲给出的实质公理体系的例子 中 的那些基本术语,我们假设

公理1 任何两个不同的组合具有一个且仅具有一个共同的成员。

公理 2 S中的每一个人属于两个且仅属于两个组合.

公理3 恰好存在四个组合.

试由这些公理推导下列定理:

定型1 在8中恰好有六个人.

定理 2 在每一个组合中恰好有三个人.

定理 3 对于 S 中的每一个人, 恰好存在 S 中的另一个人, 与他不在同一个组合.

- 7.8 试证明本讲正文中引述的关于三子棋游戏的定理,
- 7.9 雪茄游戏是这样的:先准备好一大堆雪茄,两个游戏者在长方形桌头上进行。假设雪茄是对称的,而且全都一样。两个游戏者,轮流地将雪茄放在桌上,既不允许雪茄重叠,也不允许雪茄伸出桌外。谁放最后一支雪茄,谁就赢了。试证明关于此游戏的下列定理:先起头的人使用适当的策略能赢得此游戏。
- 7.10 A,B和C玩两个同时玩的棋戏: A与B对局,B与C对局.A和C是专家,B只不过是个新手.A在一游戏中下白棋,B在另一游戏中下白棋.试证明:B使用聪明的策略,能或者赢一局、输一局,或者两盘和局.

参考文献

WILDER, R. L., Introduction to the Foundations of Mathematics, 2nd ed. New York: John Wiley, 1965.

第 8 讲

数学家的圣经

亚历山大大帝于公元前 323 年去世以后,辽阔的马其顿帝国 分裂成三部分,其中包括埃及的一部分处于亚历山大的一位多才 多艺的将军——索特尔·托勒致(Ptolemy Soter)的势力范围之内,不久他便取得了这一地区的政权·托勒玫选定距离尼罗河河口仅有几英里的亚历山大里亚作为他的首都,并且于公元前大约 300年开办了亚历山大里亚大学"在应邀前来这所新兴学府工作的众多学者之中,有一位据说曾一度就学于雅典的柏拉图学园的 数学家——欧几里得(Euclid,公元前约330—275).

欧几里得在亚历山大里亚供职期间所承担的一项重要的数学工作,就是编纂他的具有重大历史意义的不朽之作《原本》(Elements).这部内容广泛的著作共分十三卷(或十三部分),它是公理方法的最早应用,而这种方法一直流传至今,一般都认为这部著作是数学条理化历史上的第一个重要标志,它对后世科学著述的巨大影响是难以估量的,

¹⁾ 即指托勒玫修建的一所供学者们从事研究和教学的学术中心,这所 建筑是献给艺术之神(Muses)的,此后以艺术官(Museum,艺术之宫,其后转义为"博物馆"、"陈列馆")之称闻名于世,这里住着当时的诗人、哲学家、语言学家、天文 学家、地理学家、医生、历史学家、艺术家,以及当时的大多数著名的希腊数学家。在艺术宫附近,托勒玫义修建了一个图书馆,不仅保存重要文件,而且供公众使用,据说藏书一度达750,000卷之多。——译者注

因此,欧几里得的《原本》的出现,是数学史上一个伟大的**里**程碑.这部著作如此迅速、如此彻底地取代了从前的一切同类著作,以至于现在我们根本见不到任何更早的作品,而只有通过后世作者的评注方才知道它们曾经存在¹⁾.欧几里得的《原本》,从它刚刚问世时起,就受到人们的高度重视.除了《圣经》以外,没有任何其他著作,使用、研究和印行之广泛,能与《原本》相比,两千多年以来,它一直支配着全部几何教学。自1482年第一个印刷本出版以后,至今已有一千多种不同的版本²⁾.它的内容和形式对于几何学本身以及数学逻辑基础的发展,都产生了巨大的影响。

后来,生活在五世纪的数学评注家普罗克洛斯(Proclus)对于 "elements"(本意为"要素")一词的含义作了解释.一门论证性的学科的所谓"elements",指的是在这门学科中经常使用的一些重要的、关键性的定理,在证明其他几乎所有定理时,都需要用到它们."elements"的作用犹如语言中的字母;事实上,在希腊文中字母就称为"elements".在论述一门学科时,选取一些命题作为"elements",这要求作者具有高度的技巧和判断力.

在欧几里得以前,在选择"elements"方面已有过一些尝试(当然,这无损于欧几里得的伟大成就的光辉).根据普罗克洛斯的记述,首先是公元前五世纪中期的希俄斯的希波克拉底(Hippocrtes of Chios),其次是在柏拉图和欧多克斯之间某一时期的 勒俄a(Leon).据说,在勒俄的著作中选取作为"elements"的命题比希波克拉底的著作中的多,更便于应用.马格尼西亚的修迪奥斯(Theudias of Magnesia)编写的一本教科书被看成是关于"elements"的一个出色汇集,曾在柏拉图学园中使用.这本书显然是欧几

¹⁾ D. 希尔伯特(Hilbert) 曾指出, 我们可以根据一部著作取代以前作品的数目, 来判断它的重要性,

²⁾ 中译本书名《几何原本》,共十五卷, 明朝时泰西(意大利)利玛窦与国人徐光启合译前六卷(1607年首次出版),清朝时英国伟烈亚力与国人李善兰合译后九卷,其中第四卷是公元前大约150年希普西克尔斯(Hypsicles)写的,第十五卷 可能在公元六世纪才写成。——译者注

里得的《原本》的直接先导,因为如果欧几里得的确曾在柏拉图学园中学习,那么他肯定见过这本书.欧几里得还熟悉泰特托斯(Theatetus)和欧多克斯的著作.欧几里得的工作在很大程度上是集其前人工作之大成,《原本》一书的主要贡献仅仅在于选择命题并把它们排列成一个逻辑上连贯的序列(假定从少数原始假设出发)时所表现的惊人技巧,而且现代批评家还指出《原本》一书在结构上存在某些缺点,但是,这些都丝毫不会降低这部著作的崇高价值,因为我们不能指望在那么早的时期使用公理方法进行的这一伟大尝试完美无瑕。

欧几里得《原本》一书的原始抄本现已无存。它的所有现代版本都是以亚历山大里亚的西翁(Theon of Alexandria, 希腊评注家,大约比欧几里得晚七百年)编写的修订本为根据的。直到十九世纪初才发现一个更早的抄本。1808年,拿破仑下令从意大利各图书馆搜寻有价值的手稿运回巴黎,当时F·佩拉尔(Peyrard,1760—1822)在梵蒂冈图书馆里发现一个《原本》的十世纪希腊文抄本,其成书年代比西翁的修订本还要早。但是,经过研究发现,它与西翁的修订本相差无几。

《原本》一书最初的一些完整的拉丁文译本不是译自希腊文,而是译自阿拉伯文。在八世纪,一些希腊著作的手稿在拜占庭被译成阿拉伯文,1120年,英国学者巴斯的阿德拉德(Adelard of Bath)根据一个较早的阿拉伯文译本完成了一个拉丁文译本。另外两个译自阿拉伯文的拉了文译本是分别由克雷莫纳的盖拉尔多(Gherardo of Cremona, 1114—1187)和比阿德拉德晚150年的J.坎帕努斯(Campanus)完成的.1482年,在威尼斯出版了第一个印刷本,其中包括坎帕努斯的译文。这个珍本印制得十分精美,它是第一部正式出版的具有重要意义的数学书。1572年F·科曼迪诺(Commandino, 1509—1575)完成了一个译自希腊文的重要的拉丁文译本。这个译本成为后来许多其他译本的根据,其中包括R.西姆森(Simson, 1687—1768)的很有影响的译本。由西姆森的译

本又产生了许多英文版本.

著名的法国数学家A.M.勒让德(Legendre, 1752—1833, 在数学史上以数论、椭圆函数、最小二乘法和积分等方面的工作而闻名)对于数学教学也很关心。他改编的《几何原本》(Éléments de géométrie)一书流传甚广。在这本书中,他大大简化和重新安排了欧几里得的命题,他想以此来改进欧几里得《原本》的教学。这本书在美国很受欢迎,是美国中学几何教本的原型。1819年被哈休大学的J.法勒(Farrar)译成英文,后来又不断重译和修订,共有三十多个版本。

《原本》的西翁修订本分十三卷,总共有 465 个命题.和通常的印象相反,本书的许多内容讨论的不是几何学,而是初等数论和希腊代数.

第一卷首先给出了一些必要的基本定义和解释、公设和公理.虽然目前在数学中"公理(axiom)"和"公设(postulate)"是作为两个同义词来使用的,但是某些古希腊人则认为二者是不同的,欧几里得似乎是这样来区分的。公理是适用于一切研究领域的原始假设,而公设则是只适用于正在考虑的这一特定学科的原始假设.在第一卷的命题当中,包括一些关于全等形、平行线和直线形的熟知的定理.这一卷的最后两个命题,即命题47和48,是毕达哥拉斯定理及其逆定理.这里,我们想到关于英国哲学家T.霍布斯(Hobbes)的一个小故事:有一天,霍布斯偶然翻阅欧几里得的《原本》,看到毕达哥拉斯定理,感到十分惊讶,他说:"上帝啊!这是不可能的。"他由后向前仔细阅读第一卷每个命题的证明,直到公理和公设,他终于信服了。

第二卷篇幅较小,只有14个命题,主要讨论毕达哥拉斯学派的几何代数学,在第四讲中我们已经看到,这一卷的命题12和13实质上是毕达哥拉斯定理的推广,现在称为余弦定理.

第三卷有39个命题,包括关于圆、弦、割线、切线以及圆心 角和圆周角的一些熟知的定理,这些定理在目前的中学几何课本 中都能找到, 第四卷仅有16个命题, 讨论给定的圆的某些内接和外切正多边形的尺规作图问题.

正如在上一讲中所说的,第五卷对于欧多克斯比例理论作了精彩解释.这一卷被认为是最重要的数学杰作之一.上一讲已经提到,波尔查诺在布拉格度假时,通过阅读这一卷治好了他的病痛.第六章应用欧多克斯的理论来研究各种相似图形,是内容较多的一章.

第七、八、九卷共有102个命题,讨论初等数论、第七卷首先介绍一种求两个或多个整数的最大公因子的方法,现在称为欧几里得算法。在这一卷中,还解释了早期毕达哥拉斯学派的比例理论。第八卷主要讨论连比例,以及有关的几何级数。如果连比例a:b=b:c=c:d成立,则a,b,c,d构成几何级数。在第九卷中有许多关于数论的重要定理。命题区14等价于重要的算术基本定理。任何大于1的整数都能按(实质上)唯一的方式表示成一些素数之积。在命题区20中,对于素数的个数是无限的这一事实给出了一个漂亮的证明。命题区35用几何方法推导出几何级数前n项之和的公式,这一卷的最后一个命题即命题区36,给出了生成偶完全数的著名公式。

第十卷是很难读的一卷,讨论无理量,即与某一给定线段不可公度的线段.最后三卷,即第十一、十二和十三卷,论述立体几何,目前中学课本中讲到的许多内容,除了关于球的以外,这里都包括了.正如在下一讲中将会看到的,后来阿基米德才给出关于球的许多重要结果.

目前中学平面几何和立体几何课本中的内容大部分在《原本》 (第一、三、四、六、十一和十二卷)中都能找到,而关于圆和球的度量的内容,以及关于球面三角形的内容,是后来才出现的,在《原本》中是没有的.

除了欧几里得的《原本》以外,还有其他一些古希腊的重要论 著流传至今,例如阿基米德的一些深奥的著作,阿波罗尼乌斯的 《圆锥曲线》(Conic Sections), 托勒密的《大汇编》(Almagest), 希罗(Heron)的《量度》(Metrica), 丢番图的《算术》(Arithmetica), 门纳劳斯的《球面学》(Sphaerica), 帕普斯的《数学汇编》(Mathematical Collections)等等。如果不受本书篇幅的 限制, 上述许多著作都应列为数学史上的伟大里程碑,但是我们现在只好割爱了. 然而, 无论怎样压缩, 欧几里得的《原本》总是必不可少的.

这里,我们列出欧几里得的公设和公理,因为在以后几讲中 我们将要讨论由此而得出的一些重要结论.

公设

- 1. 连接任何两点可以作一直线段.
- 2. 一直线段可以沿两个方向无限延长而成为直线.
- 3. 以任意一点为中心、通过任意给定的另一点可以作一圆.
- 4. 凡直角都相等,
- 5. 如果同平面内一直线和另二直线相交,同一侧的两内角 之和小于二直角,则这二直线无限延长,必在这一侧相交。

公理(或一般概念)

- 1. 等于同量的量彼此相等.
- 2. 等量加等量,其和仍相等.
- 3. 等量减等量,其差仍相等.
- 4. 彼此能重合的量是相等的.
- 5. 整体大于部分.

我们看到,前三个公设限定了用圆规和无刻度的直尺可以完成的那些作图;因此,这两件仪器常常称为欧几里得工具,使用它们可以完成的作图称为欧几里得作图。欧几里得利用存在定理认可的作图来证明某些几何图形确实存在。例如,我们可以把一个给定角的平分线定义为这个角所在平面上的这样一条直线。它通过角顶而且把这个角分成两个相等的角。但是,一个定义并不能保证它所定义的事物一定存在;它是否存在,还需要证明。为了证明一个给定的角确实具有平分线,我们只须证明这个平分线

的确能够作出来,存在定理在数学中十分重要,实际作出一个几何图形,是证明它存在的最令人满意的方式,虽然我们可以把"方圆"定义为这样一个图形;它既是一个正方形,又是一个圆,但是我们决不能证明这样的图形存在,"方圆"的集合实际上是空集,在数学上,确认满足某一定义的几何图形的集合并不正好是空集,这是很重要的.

还有一些不仅使用欧几里得工具的作图方法,这增添了几何学的趣味,人们曾花费大量的精力设法解决现在已证明仅用圆规和直尺不能解决的一些作图问题,尽管是徒劳的,但是却发现了许多有趣的几何事实.

我们以后将会看到,欧几里得的第五公设在十九世纪导致了对于数学发展极其重要的一些结果。C.J.凯塞(Keyser)把这个假设称为。"科学史上独一无二的坚持到底的英勇斗士。"

习 题

- 8.1 如果让你从下面这些定理中选取两个作为 平 面几何课程的"elements",那么你选哪两个?
 - 1. 三角形的三个高(必要时可以延长)相交于一点.
 - 2. 三角形的三个内角之和等于二直角.
 - 3. 圆周角以其所对圆弧的一半来度量:
- 4. 两圆相交,由公共弦的延长线上的任何一点向两圆所引的切线,长度相等。
- 8.2 (a) 一位几何教师准备讲授关于平行四边形的课程,在 定义了平行四边形以后,她应当选取哪些关于平行四边形的定理 作为这个课程的"elements"?
- (b) 在讲授关于相似形的课程之前,几何教师先要介绍一些比例理论. 他应当选取哪些定理作为这个课程的 "elements"? 应当依怎样的次序来排列它们?

- 8.3 (a) 数学教师在中学代数课中准备讲授 关于几何级数的论题,在定义了几何级数以后,他应当选取哪些关于几何级数的定理作为这个课程的"elements"?
- (b) 设想你自己来建立三角恒等式的初等理论,你会选取哪些恒等式作为你的理论的"elements"? 依怎样的次序来排列?
- 8.4 作为《原本》一书中的非几何内容的一个例子,让我们来考察欧几里得算法,即求两个正整数的最大公因子 (g.c.d) 的一种方法. 这种方法是在第七卷的开头出现的,当然,在欧几里得以前肯定有人已经知道. 这种方法是现代数学中的一些新发展的基础. 作为一个法则,它可以叙述如下:用两个正整数中的较小的一个作为除数去除较大的一个. 然后,用所得的余数作为除数去除上一次的除数,这样继续下去,直到没有余数为止. 这时,最后一次的除数就是原来两个正整数的最大公因子.
 - (a) 试应用欧几里得算法求5913和7592的最大公因子。
 - (b) 试应用欧几里得算法求1827,2523和3248的最大公因子.
 - (c) 试证明欧几里得算法确实能够给出最大公因子.
- (d) 设h是正整数a和b的最大公因子, 试证明, 存在整数p和q(不一定是正的), 使得pa+qb=h.
 - (e) 试求对应于部分(a)中的两个正整数的 p 和 q.
- (f) 试证明: $a \rightarrow b$ 是互素的,当且仅当存在整数 $p \rightarrow q$,使得pa+qb=1.
- 8.5 (a)试应用习题8.4(f)证明:如果 p 是素数并且能够整除uv,则或者 p 能整除 u,或者 p 能整除 v.
- (b) 试应用部分(a) 证明算术基本定理。任何大于1的整数都能按唯一的方式分解成一些素数之积。
 - (c) 试求整数a, b, c, 使得65/273=a/3+b/7+c/13.
- 8.6 算术基本定理说的是:对于任何给定的正整数a,存在确定的一些非负整数a₁, a₂, a₃, …(其中只有有限个不为零),使得

$$a=2^{a_1} 3^{a_2} 5^{a_3} \cdots$$

其中2,3,5,…是相继的素数.这就使我们想到一种 很有用的表示法.我们记

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

其中 a_n 是最后一个非零指数. 例如, 我们有 12 = (2, 1), 14 = (1,0,0,1), 27 = (0,3) 和 360 = (3,2,1).

试证明下列定理:

- (a) $ab = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots)$.
- (b) b 是 a 的因子,当且仅当对于每个i,有 $b_i \leq a_i$.
- (c) a 的因子的个数等于 $(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1)$.
- (d) 数 a 为完全平方数的必要充分条件是: a 的 因子的个数 为奇数,
 - (e) 设

$$q_i = \begin{cases} a_i = b_i \ge p$$
 较小的一个,如果 $a_i \neq b_i$, $a_i \neq b_i$,如果 $a_i = b_i$.

这时, $q=(q_1, q_2, \cdots)$ 是 a 和 b 的最大公因子.

- (f) 如果 a 和 b 是互素的,而且 b 能整除 ac, 则 b 能整除 c.
- (g) 如果 a 和 b 是互素的,a 能整除 c,b 也能整除 c,则 ab 能整除 c.
 - (h) 试证明 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 都是无理数.
- 8.7 欧几里得把圆定义为"由一条线包围着的平而图形,其内一点与这条线上的点连接成的所有线段都相等"。 圆 的 这个定义与圆的现代定义有什么区别?
- 8.8 我们应当正确理解欧几里得的公设了的意思。它说的是,给定两点A和B,我们能够以A为中心、以AB为半径作一圆。由此可知,欧几里得圆规与现代圆规是不同的,因为我们可以使用现代圆规,以任何点A为中心、以任何线段BC为半径作一圆。换句话说,我们可以用现代圆规作为分规,把距离BC移到中心A。相反,欧几里得圆规则不然,因为认为只要它的一只

脚离开纸面,它就立即毁坏.

学生第一次阅读欧几里得的《原本》, 当看到第一卷的开头几个命题时, 可能会感到奇怪. 前三个命题都是作图题:

- 11 在一条给定的线段上作一个等边三角形,
- I2 由一个给定的点作一条线段, 使它等于给定的线段.
- I3 给定两条不相等的线段,在较长的一条线段上截取一条线段,使它等于较短的一条线段.

这三个问题,如果使用直尺和现代圆规,则很简单,但是如果使用直尺和欧几里得圆规,则需要某些技巧.

- (a) 使用欧几里得工具解问题[1.
- (b) 使用欧几里得工具解问题12.
- (c) 使用欧几里得工具解问题13.
- (d) 试证明: 命题I2表明直尺和欧几里得圆规与直尺和现代 圆规是等价的:
- 8.9 欧几里得在《原本》的第二卷中,用几 何 方法证明了一 些代数恒等式,试说明怎样用几何方法来证明下列每个恒等式, 这里假设a, b, c, d都是正的量;
 - (a) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.
 - (b) $(a-b)^2 = a^2 2ab + b^2$, a > b.
 - (c) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, a>b.
 - (d) a(b+c) = ab + ac.
 - (e) $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$, a > b.
 - (f) (a+b)(c+d) = ac+bc+ad+bd.
 - 8.10 (a) 设 r 和 s 表示下列二次方程的两个根:

$$x^2 - px + q^2 = 0$$
,

其中p和q是正整数,试证明: r+s=p, $rs=q^2$, 且当 $q \leq p/2$ 时,r和s都是正数.

(b) 为了用几何方法解部分(a)中的二次方程得到实根,我们必须由给定的线段 p 和 g 求出线段 r 和 s. 也就是说,我们必

须作一个长方形,使它的面积等于一个给定的正方形,而它的底与高之和等于一个给定的线段. 试根据图24,设计一个适当的作图方案,并且在几何上证明. 为了能得到两个实根,我们必须有 $q \leq p/2$.

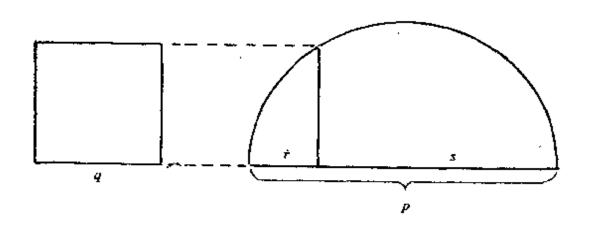


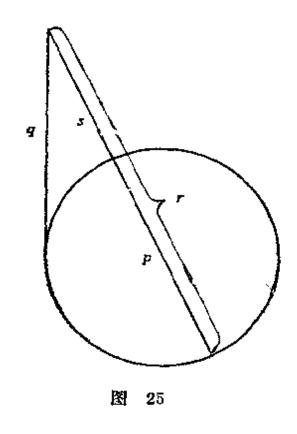
图 24

(c) 设 r 和 s 表示二次方程

$$x^2 - px - q^2 = 0$$

的两个根,这里p和q都是正数,试证明,r+s=p, $rs=-q^2$,两个根都是实数,数值较大的一个根是正的,另一个根是负的。

- (d) 为了用几何方法解部分(c)中的二次方程,我们必须由给定的线 段 p和 q 求出线 段 r 和 s. 也就是说,我们必须作一个长方形,使它的面积等于一个给定的正方形,而它的底与高之差等于一个给定的线段. 试根据图25,设计一个适当的作图方案.
- (e) 用几何方法解二次方程 $x^2+px+q^2=0$ 和 $x^2+px-q^2=0$ (其中p和q都是正数)求出实根,试设计作图方案.
 - (i) 给定一个单位线段,试用几何方法解二次方程 $x^2-7x+10=0$.
 - (g) 给定一个单位线段,试用几何方法解二次方程 $x^2-4x-21=0$.



- (h) 试应用直尺和圆规,把一个线段 a 分成两部分,使它们的平方差等于它们的积.
- (i) 试证明: 在(h)中, 较长的线段是较短的 线段与整个线段的比例中项, (这时, 我们说线段 a 被分成外中比, 或者被黄金分割. 见第5讲).

参考文献

HEATH, T. L., The Thirteen Books of Euclid's Elements. 2nd ed., 3 vols. New York: Cambridge University Press, 1926. Reprinted by Dover, 1956.

第 9 讲

思想家和暴徒

现代数学的许多重大发展,究其根源,都可以追溯到古希腊人的工作,这一点简直令人不可思议。正如二十世纪初哈佛大学的著名几何学家J. L. 库利奇(Coolidge)所赞叹的: "当年,在那个国度里一时涌现了多少天才!"但是,毫无疑问,在这些天才人物之中,最杰出的一位,就是叙拉古的阿基米德(Archimedes, of Syracuse)——古希腊最著名的数学泰斗。在这一讲中,我们将会看到,阿基米德使用他所掌握的有限的数学工具,求出了某些平面曲线图形的面积,以及某些曲面所围成的立体的表面积和体积;在此基础之上,经过许多年以后,由开普勒、卡瓦列利、费马、沃利斯、巴罗、莱布尼茨和牛顿等人进一步发展、完善,结果产生了积分学。

阿基米德于公元前大约 287 年生在西西里岛的叙拉古,当时希腊的一个殖民城市;公元前 212 年罗马人攻陷叙拉古时被害.他是一位天文学家的儿子,很受叙拉古国王海埃罗(Hieron)的器重.据信,他年轻时曾在埃及的亚历山大里亚大学呆过几年,因为这个著名的学术机关的成员科农(Conon)、多西修斯(Dositheus)和埃拉托色尼(Eratosthenes)都是他的朋友.他把自己的许多数学发现传授给了欧几里得的这些很有才能的继承人.

后来的罗马历史学家记述了许多关于阿基米德的生动有趣的故事,有些故事说明,在受挫的罗马将军马塞拉斯(Marcellus)指挥军队围攻叙拉古的两年期间,阿基米德设计了许多灵巧的军械以助于防守,例如,据说他发明了一种弩炮,射程可以调节,他还制造了一种"投掷杆",基座安有轮于,可以迅速地移动到城墙的任何部位,既可用来把重物扔到正在靠近的敌舰上,又可充当起重机,把入侵的战船高高吊起,据得粉碎,阿基米德还利用巨

型聚光镜,把集中的阳光照到敌人停泊在海上的帆船上使它们焚毁,这个故事虽然是后人讲述的,但是很可能确有其事。还有一个故事,说的是阿基米德坐在放在海边的一把舒适的椅子上,利用一组滑轮,一个人毫不费力地把一只很重的船从陆上的船坞移到水中,他还夸下海口:"只要给我一个立足之处,我就可以移动地球。"

正如其他一些伟大的数学家一样,阿基米德能够做到精神高度集中,有一些故事说明,当他全神贯注地思考一个问题时,他会忘掉周围的一切.人们常常说到这个故事:海埃罗国王和可疑的手饰匠. 叙拉古国王海埃罗让一个手饰匠给他制作了一顶金玉冠,完成以后,国王怀疑手饰匠在其中加入白银而窃取了黄金. 他想要弄清情况,但又不愿损坏王冠,子是他向阿基米德提出了这个问题.有一天,正当阿基米德在浴池洗澡时,他想出了解决这个问题的关键,即浮力第一定律: 浸入流体中的物体所受的浮力,等于物体所排开的流体的重量.这一发现使他兴奋之极,他从水池中跳出,连衣服都忘了穿,就从房间跑出去.在大街上,他一边跑,一边喊: "知道啦! 知道啦!"(Eureka, Eureka.)

阿基米德随时都在思考,他的许多几何学发现都是利用在炉灰上或泥地上所画的图形而得到的。事实上,他就是正在潜心研究画在沙盘上的一个几何图形时被杀害的。那时,由子守备松懈,叙拉古城终子被马塞拉斯和他的军队攻破。阿基米德正在专心思考,一个刚攻进城的罗马士兵向他跑来,身影落在沙盘里的图形上,他挥手命这个士兵离开,以免弄乱他的图形,结果,那个发怒的士兵就用长矛把他刺死了。

阿基米德有十部著作流传至今,还有迹象表明他的另一些著作失传了,现存的这些数学著作都是数学杰作,表述完美而精练,体现了高度的创造性、计算的技巧和证明的严格性,在这些著作中,他对数学所做出的最引人注目的贡献,或许就是积分方法的早期发展,现在我们就来介绍这项杰出的成就,

阿基米德有几部著作所用的方法实际上相当于进行真正的积分,这里,我们仅仅考虑其中两部著作:阿基米德本人最得意的《论球和柱体》(On Sphere and Cylinder)一书和新近才发现的题为《方法》(Method)的短论,《论球和柱体》一书分两卷,共含60个命题,其中第一次出现了球和球冠的表面积、球和球缺的体积的正确的数学表达式、关于球的表面积和体积的情况,是在第一卷的命题 33 和 34 的推论中明确陈述的:如果圆柱的底等于球的大圆,圆柱的高等于球的直径,则圆柱的总面积(包括侧面和两底)恰好等于球的表面积的3/2,圆柱的体积恰好等于球的体积的3/2,由此不难得到熟知的公式:

 $S = 4\pi r^2 \text{ for } V = 4\pi r^3/3$,

其中S和V分别表示半径为r的球的表面积和体积,这些结果是通过一系列命题一步一步地认真推导出来的,这个过程蕴含着积分的思想,这里不是采用直接的、简易的现代极限方法,而是采用间接的、繁琐的、但是同样可用的双重归谬法 (reductio ad absurdum),即所谓欧多克斯穷竭法,为了充分说明这种方法,必须把它也列为数学史上的一个里程碑,但是限于篇幅,在这里我们只好不去解释这种方法,也不考察阿基米德对于球的表面积和体积的上述两个公式所给出的极其巧妙的证明¹⁰.相反,我们将比较详细地研究阿基米德在《方法》一文中所进行的思考,在这篇短论中,他告诉我们他是如何首先归纳出这些公式的。这里不仅明确地体现了积分的思想,还说明了一个有趣的发现方法。

阿基米德的《方法》一文失传已久,仅仅从一些引文中才为人所知;直到1906年,杰出的德国数学史学家 J. L. 海伯格 (Heiberg)才在君士坦丁堡的一个图书馆里发现它的一个十世纪的 抄本. 这是一部重显的羊皮纸文书;也就是说,一部羊皮纸文书,经过几个世纪以后,洗去原来的字迹另写新的内容,而随着时间

^{!)} 但是,我们可以指出,阿基米德的处理方法(经过用现代极限理论改进以后) 在一般高中立体几何教科书中几乎都能找到.

的流逝,原来的字迹透过新写的字迹模模糊糊地重新显现出来, 这部著作在形式上是致亚历山大里亚大学埃拉托色尼的一封信,

穷竭法虽然严格,但是缺乏独创性、也就是说,一旦知道了一个公式,就可以使用穷竭法作为很好的工具来证明这个公式,但是却不能从这种方法本身得到启示而首先发现结果",那么,阿基米德究竟是怎样发现新的结果,例如《论球和柱体》一书中给出的那些公式,然后再用穷竭法进行巧妙的证明的呢?阿基米德在《方法》一文中对这个问题作了回答。

阿基米德所用方法(一般称为他的平衡法)的基本思想是:为 了求得一个图形的面积或体积,首先把这个图形划分成大量的平 行窄条或平行薄片,(在想象中)把分成的这些部分吊在一个给定 的杠杆的一端,使之同一个容量(即而积或体积)和重心已知的图 形相平衡.现在,让我们应用这种方法求出球的体积公式,来具 体说明这种方法.

设r为一个球的半径.把这个球的通过两极的直径沿水平的 x轴放置,使北极N与原点重合(见图26). 画出2r×r的矩形NABS 和三角形ACS(即直角边长为2r的直角等腰三角形)绕 x轴旋转而得到的圆柱和圆锥.现在,从这三个立体中割出与N距离为x、厚度为 Δx 的三个竖直薄片(假设它们都是扁平的圆柱).这些薄片的体积近似地为

 \mathbf{x} , $\pi x(2r-x)\Delta x$, 2

圆柱: πr²Δx,

圆锥: πx²Δx.

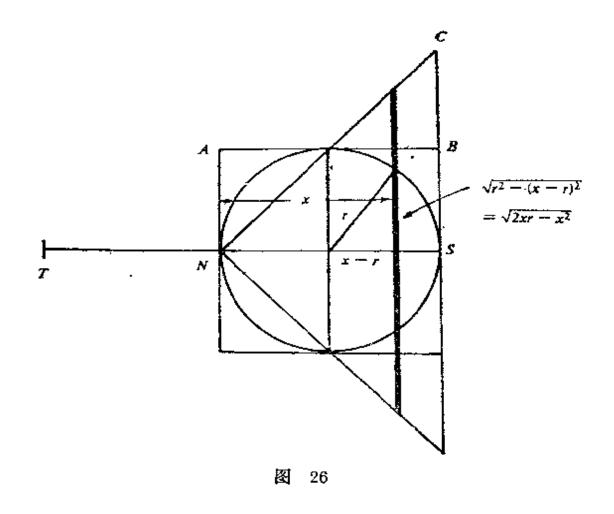
取由球和圆锥割出的相应的两个薄片,把它们的重心吊在点T,使TN=2r.这两个薄片绕N的合成力矩"为

 $[\pi x (2r-x) \Delta x + \pi x^2 \Delta x] 2r = 4\pi r^2 x \Delta x.$

¹⁾ 在这方面,穷竭法同高中课程中讲到的数学归纳法非常相似.

²⁾ 因为这个薄片的半径等于*和2r-*的比例中项。

³⁾ 一个立体绕一点的力矩,等于它的体积与它的重心到该点的距离之积。



我们看出,这是由圆柱割出的薄片处于原来位置时绕 N的矩的四倍,把所有这样割出的薄片绕 N的力矩加在一起,我们便得到 2r [球的体积+圆锥的体积]=4r [圆柱的体积].

魛

$$2r$$
[球的体积 + $\frac{8\pi r^3}{3}$] = $8\pi r^4$,

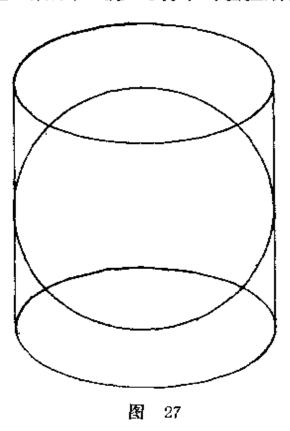
球的体积=
$$\frac{4\pi r^3}{3}$$
.

由《方法》一文我们得知,这就是阿基米德发现球的体积公式的方法,但是,阿基米德数学修养极高,他决不肯把这种方法当作证明,而是随后就利用穷竭法给出了一个严格的证明.

在阿基米德所用的平衡方法中,我们看到,把一个量看成是

由大量的微元所组成的,这种根据还不充分的思想可以获得多么丰硕的成果,更不必说,我们可以借助于现代极限理论而使阿基米德的平衡方法完全严格化,成为与现在的积分法实质上相同的方法,当然,不论从什么观点来看,都应当认为阿基米德的工作是数学史上的一个真正的里程碑。

阿基米德对于他在《论球和圆柱》一书中所做的贡献如此欣赏,以致于他说: 当他死后,希望能把一个内切于圆柱的球的图形(如图27所示)刻在他的墓碑上,后来,当罗马将军马塞拉斯得



经荒芜的墓地修整一新.但是,年长日久,墓地再次废弃.几个世纪以后,随着城市的发展,这个古迹似乎已永远消失无法查考了.然而,在1965年,当为叙拉古的一家新建的饭店挖掘地基时,铲土机碰到了一块墓碑,上面刻着一个内切于圆柱的球的图形. 叙拉古人终于为他们的这位空前绝后的伟人重建了莹墓.

目前正在科罗拉多大学电子工程系工作的捷克斯 洛 伐 克 科学家 P. 贝克曼(Beckmann)把历史看成是主要由世界上的 两 类

人——思想家和暴徒之间的殊死斗争而形成的,他对这两类人作 了如下的描述,可以称为贝克曼定律: "在思想家和暴徒之 间 进 行的斗争中, 暴徒总会得胜; 然而, 思想家将永垂青史, 虽死犹 生,这一点是暴徒无法与之相比的."例如,阿基米德等古希腊 人都是思想家,而马塞拉斯等罗马入侵者则为暴徒。在他们之间 的斗争中, 马塞拉斯胜利了, 但是阿基米德的成就已流芳百世, 而马塞拉斯只不过是得意一时,对于这场生死搏斗,爱尔兰最伟 大的科学家W. R. 哈密尔顿(Hamilton)也有评论: "难 道 有 谁 宁肯赞扬侵略者马塞拉斯而不愿歌颂阿基米德吗?"英国哲学家 A. N. 怀特黑德 (Whitehead) 也就阿基米德之死写道:"决没有 罗马人会在研究几何图形时而死去."贝茨克曼定律说明: 人类将 永远怀念阿基米德,而马塞拉斯早已被遗忘了,著名的英国数论 学家G. H. 哈代(Hardy)进一步指出, 仅就希腊哲学 家 本 身 而 言,"即使当埃斯希卢斯 (Aeschylus)1) 已被忘掉之时,阿基米德仍 然会留在人们的记忆中,这是因为语言可以死去,但数学思想则 与世长存,"

阿基米德的成就是多方面的,例如是他开创了圆周率 π值的 科学计算的悠久历史,是他写出了关于数学物理的第一篇重要论 文. 因此,在后面的一讲中,我们还要讨论阿基米德的《论球和 圆柱》一书的第二卷,对于三次方程的求解问题作一评述。

习 题

- 9.1 浮力第一定律是阿基米德的《论浮体》一书的第一卷中 出现的(命题7).
- (a) 设一个重 w 磅的王冠是由 w₁ 磅的金和 w₂ 磅的 银 制 成的, w 磅的纯金沉入水中时减轻 f₁ 磅, w 磅的纯银沉入水中时减

¹⁾ 古雅典三大悲剧家之一,公元前 525 年生于雅典西北的埃流两斯,著有《被斯人》等80多部作品,曾接受海埃罗国王的邀请去叙拉古演出,影响甚大,公元前458年卒于西西里岛南部的杰拉城,——译者注

轻 f, 磅, 而这个王冠沉入水中时减轻f磅, 试证明

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{f_2 - f}{f - f_1}.$$

(b) 设部分(a)中所考虑的王冠当沉入水中时排开 v 立 方 英寸(1英寸=0.0254米)的水,而重量与王冠相同的纯金块和 纯 银块沉入水中时分别排开 v₁ 和 v₂ 立方英寸的水,试证明

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{v_2 - v}{v - v_1}.$$

- 9.2 试由阿基米德的《论球和圆柱》第一卷命题33和34的推论,推出半径为r的球的表面积和体积的熟知公式.
 - 9.3 试定义球冠、球带、球缺、球台和球扇形.
- 9.4 假设定理"球带的面积等于大圆周长与球带之高的乘积"成立,试推导球的表面积的熟知公式,并证明定理:"球冠的面积等于以其生成弧所对之弦为半径的圆的面积."
- 9.5 假设球扇形的体积等于其底面面积与球的半径之积的三分之一,试推导下列结果:
- (a) 如果从半径为r的球中截出的球缺,其高为h,底面 半径为a,则其体积等于

$$V = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right) = \pi h \left(\frac{3a^2 + h^2}{6} \right).$$

(b) 如果球台的高为 h, 两底面的半径分别为 a和 b, 则其体积等于

$$V = \frac{\pi h (3a^2 + 3b^2 + h^2)}{6}.$$

- (c) 部分(b)中所考虑的球台,等于半径为h/2的一个球,与高为 h/2、半径分别为 a 和 b 的两圆柱之和。
- 9.6 图28表示以AC为弦的抛物线弓形. CF是抛物线在点C处的切线,AF平行于抛物线的轴. K是FA的中点,HK=KC.取HC作为杠杆,以K为支点.移动OP使其中点处于点H,面OM原地不动.
- (a) 利用几何定理OM/OP = AC/AO,根据阿基米德平衡法证明: 抛物线弓形的面积等于三角形AFC的而积的三分之一.

- (b) 设U是AC的中点,过点U的、与抛物线的轴平行的直线与抛物线相交于点V,与FC相交于点 W.根据部分(a)的结论,且利用点V在HC上这一事实,证明: 抛物线弓形的面积等于三角形AVC的面积的三分之四.
- (a)和(b)的思路,是阿基米德在《方法》一文中叙述的,这说明他是怎样发现(b)中的那个结论的。但是,阿基米德的数学 乘赋不会允许他把这样的处理方法当作证明,他随后在《抛物线的求积法》(Quadrature of the Parabola)一文中,利用欧多克斯 穷竭法给出了一个严格的证明。

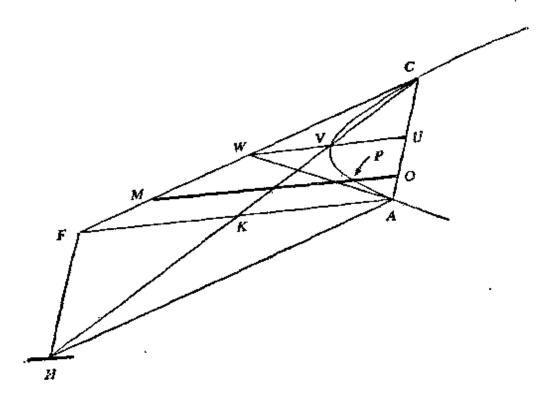


图 28

9.7 设给定两条曲线 m 和 n, 以及一点O. 假设我们可以在一直尺上画出一线段MN, 然后调整直尺的位置, 使它通过点O, 并与曲线 m 和 n 分别相交于点 M 和 N. 这时, 沿直尺所画之直线称为根据"插入原理" (insertion principle) 而作出的. 如果允许应用插入原理的话, 那么原来用欧几里得工具不能作图的问题, 这时用这些工具也可以解决了. 试证明应用插入原理, 按 下 述 作 图

法,可以三等分任意角.

设AOB是一个圆的任何圆心角.通过点B作直线BCD,它与这个圆相交于另一点C,与AD的延长线相交于点 D,使得 CD=OA,即圆的半径.这 时, $\angle ADB=\frac{1}{3}$ $\angle AOB$.

阿基米德给出的一个定理,蕴含着三等分角问题的这种解法.

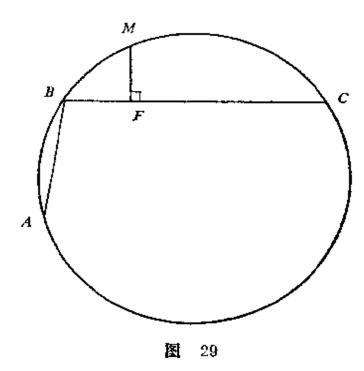
9.8 借助于阿基米德螺线可以给出化圆为方问题(作一个正方形,使其面积等于给定的圆的面积)的一个巧妙的解法,据说阿基米德确实使用他的螺线解决了这个问题,我们可以用运动学的术语,把阿基米德螺线定义为一点 P 的轨迹,点 P 沿一射线匀速运动,而这一射线又围绕其原点在平面上匀速转动,如果我们把点P与射线的原点O重合时射线的位置OA作为极坐标的轴,则阿基米德螺线的极坐标方程为 r=aθ,其中a 是比例常数.

试说明如何利用阿基米德螺线作一正方形,使其面积等于中心为 O、半径为 a 的圆的面积,

- 9.9 试说明如何利用阿基米德螺线三等分(一般地说,任意等分)任何角AOB.
 - 9.10 阿拉伯学者把下述"折弦定理"归功于阿基米德: 如图

29所示,如果 AB 和 BC是圆的一条折弦,且 BC > AB, M是弧 ABC 的中点,则由 M向 BC 所引垂线的 垂足F是折弦ABC的中点,

- (a) 试证明折弦 定理.
- (b) 设弧 MC = 2x, 弧 BM = 2y, 相



继证明: $MC = 2 \sin x$. $BM = 2 \sin y$, $AB = 2 \sin (x + y)$, $FC = 2 \sin x$ $\cos y$, $FB = 2 \sin y \cos x$. 然后,证明由折弦定理可以得到恒等式 $\sin (x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$.

(c) 试应用折弦定理推导恒等式

 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$

参考文献

DIJKSTERHUIS, E. J., Archimedes. New York: Humanities, Press, 1957.

HEATH, T. L., The Works of Archimedes. New York: Cambridge University Press, 1912. Reprinted by Dover, New York.

第 10 讲

来自天文学的动力

三角学的产生是不明确的.远在希腊时代以前,在埃及的 兰德纸草书(公元前大约1650年)中有一些问题就已涉及到正四棱 椎底上的二面角的余切,而称为"普林顿 322 号"的一件巴比伦泥版文书"(公元前 1900 年—1600年),实质上包含着一个很值得注意的正割表,其中含有界于45°和30°之间的十五个角度的正割.对于古代美紫不达米亚数学的深入研究,或许还会发现实用三角学的重大发展.巴比伦天文学家已经积累了相当可观的天文学数据,他们的许多天文学知识超越了希腊人.正是这种早期的天文学促进了球而三角学的创立.

据说,希腊最早的天文学家之一,萨 莫 斯 的 阿 利 斯 塔 克

¹⁾ 关于古代巴比伦文明和数学的知识,大都来自其泥版文书。这些泥版是在胶泥尚软时刻上字然后晒干的,其中有一部分完整地保存下来了.所谓"普林顿322号"是指保存在美国G.A.普林顿(Plimpton)考古收藏馆中编号为322的一块泥版。——译者注

(Aristarchus of Samos,约公元前310—前230)已经把数学应用于天文学,并且最早提出了太阳系的日心说¹⁰.他没有著述流传后世,但是有的研究报告表明,在他的题为《论日、月的大小和距离》(On Sizes and Distances of the Sun and Moon)的短论中,他利用了与下列不等式等价的一个事实:

$$\frac{\sin a}{\sin b} < \frac{a}{b} < \frac{\tan a}{\tan b},$$

其中 $0 < b < a < \pi/2$.

我们所知道的另一位古希腊杰出的数学兼天文学家是希帕科斯(Hipparchus),他生于小亚细亚,活跃于公元前140年前后。虽然希帕科斯于公元前146年在亚历山大里亚公布了一项关于春分点的观测结果,但是他的一些最重要的天文观测是在著名的罗得岛天文台进行的。作为一个以严谨而著称的天文观测者,他的主要成就是:确定平均太阴月精确到与现在采用的值相差不到一秒,精确计算黄道的倾角,发现和估计春分点的岁差。据说,他还计算出月球的视差,确定了月球的近地点,记录了850颗恒星。他提倡用经度和纬度来确定地面上的位置。也许是他首先把圆的360°划分法引入希腊。虽然我们对这些成就的了解靠的都是第二手材料(因为希帕科斯几乎没有任何作品流传下来),但是我们可以相信,希帕科斯确已掌握了天球三角学的基本知识。

希帕科斯与三角学的更直接、更重要的联系在于: 亚历山大里亚的西翁(Theon of Alexandria, 四世纪的评注家)把一部论述如何编制"弦表"(table of chords)的著作(共12卷)归功于希帕科斯.这个弦表虽已失传,但是C. 托勒密(Ptolemy,约85—165)给出的另一个弦表(据信是根据希帕科斯的著作改编的)却保存至今. 托勒密的弦表列出了相应于给定圆的从1/2°至180°的区间内每隔半度的一切圆心角所对之弦的长度,把这个圆的半径分为60等

¹⁾ 阿利斯塔克有时被称为"古代的哥白尼"。

份,把其中一小份取为长度的单位,并采用60进小数来表示这些弦的长度,这时,如果把对应于圆心角α的弦长记为 ard α,那 么我们就可以从弦表中查出

ard
$$36^{\circ} = 37^{\circ}4'55''$$
,

这意味着:对应于 36° 圆心角的弦长等于半径的 37/60 (即 37 小份),加上一小份的4/60,再加上一小份的55/3600.由图30可以看出,弦表相当于三角函数表中的正弦表,因为

$$\sin \alpha = \frac{AM}{OA} =$$
 圆的直径 $= \frac{\operatorname{crd} 2\alpha}{120}$.

因此, 托勒密的弦表实际 上给出了从0°到90°的区 间内每隔1/4度的那些间 的正弦. 有些报告说明 的正弦. 有些报告说明 的在弦. 有些报告说明了 的弦表, 并且显然已经知 道了与现在解直角球面三 角形时用的一些公式等 价的结果.

西翁还提到亚历山大 里亚的门内劳斯(Menelaus of Alexandria,约公元

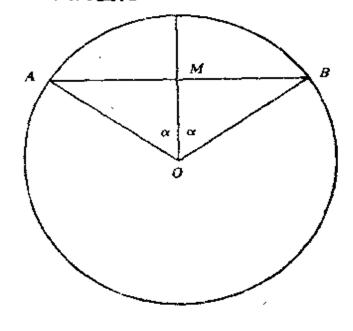


图 30

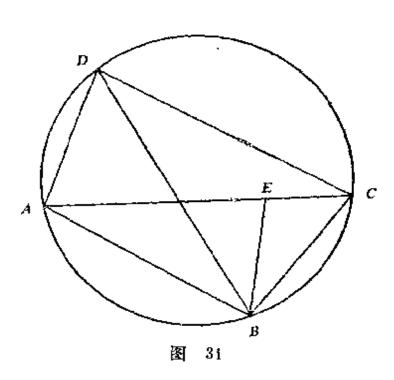
100年)所写的论圆内之弦的一部著作(共 6 卷),这部著作同门内 劳斯的其他一些著作都已失传了.不过,门内劳斯有一部三卷的 著作,称为《球面学》(Sphaerica),却在阿拉伯保存下来了.这些 著作揭示了希腊三角学的重大发展.

有许多早期的希腊天文学著作都不见了,这是由于托勒密写了一部专著,它的水平远远超过了从前的一切著作,因而取代了它们,在公元大约 150 年,托勒密写出了他的伟大的、具有决定性意义的希腊天文学专著,这部影响深远的著作题为《数学汇编》

(Syntaxis mathematica),以其完整性、简洁性和优美性闻名于世.为了与其他次要的天文学著作相区别,后来的评注家把它称为至高无上的《大汇编》(magiste).最后,阿拉伯译者又在书名前加上了阿拉伯文的冠词al,称为Almagest.这部著作共有十三卷,在第一卷中,除了一些基本的天文学内容以外,还有前面已经讲到的那个弦表,并且对于它的推导作了简要的解释,这里用到了下述重要的几何学命题(称为托勒密定理):在一个圆的内接四边形中,两个对角线之积等于两对对边乘积之和.

如果不采用所谓三角函数表,实用三角学当然不会取得重大 发展,因此,第一次系统编制可用的三角函数表,堪称是数学史 所的一个里程碑,下面我们简要地介绍托勒密在编制他的弦表时

上用的方法¹. 为了表达方便和容易理解,我们将使用现代的代数符号,并采用现代的十进制小数来代替古代的六十进制小数来代替古代的六十进制小数,分十步来介绍托勒密方法的细节.



由相似三角形 ABE 和 DBC, 我们有 AB/AE=DB/DC, 因 此 (AB)(DC)=(DB)(AE). 同样,由相似三角形 ABD 和EBC, 我们有AD/DB=EC/CB, 因此(AD)(CB)=(DB)(EC). 由此

¹⁾ 以前希帕科斯可能已经用过这种方法,在普林顿322号中出现的那个简略得多的正割表,看来是通过收集一些简单的毕达哥拉斯三角形而巧妙地编制出来的.

得到

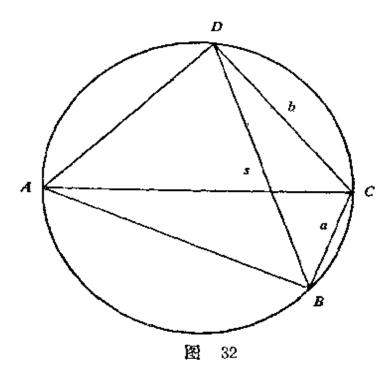
(AB)(DC)+(AD)(CB)=DB(AE+EC)=(DB)(AC), 定理得证.

现在, 我们来证明托勒密定理的三个推论.

2. 推论 1 如果a和b是单位圆中两弧所对之弦,则 $s = (a/2)(4-b^2)^{1/2} + (b/2)(4-a^2)^{1/2}$

是两弧之和所对之弦,

把托勒密定理应用于图 32 中的四边形,其中 AC 是 直 径, BC=a, CD=b.



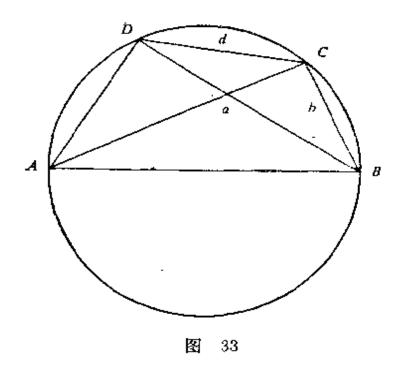
3. 推论 2 如果a和b(a>b)是单位圆中两弧所对之弦,则 $d=(a/2)(4-b^2)^{1/2}-(b/2)(4-a^2)^{1/2}$

是两弧之差所对之弦.

把托勒密定理应用于图 33 中的四边形,其中 AB 是 直 径, BD=a, BC=b.

4. 推论 3 如果t是单位圆中一劣弧所对之弦,则 $h = [2 - (4 - t^2)^{1/2}]^{1/2}$

是此孤一半所对之弦,



把托勒密定理应用于图34中的四边形,其中AC是直径,BD=t, BD垂直于AC. 我们得到

$$2t = 2h(4-h^2)^{1/2}$$

取等式两端的平方, 并进行整理, 得到

$$h^4 - 4h^2 + t^2 = 0$$
.

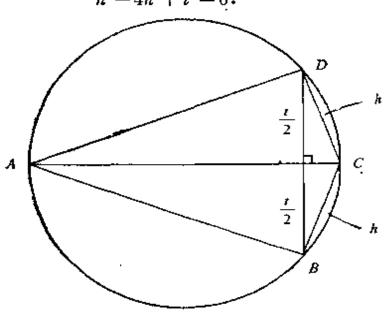


图 34

这是h²的一个二次方程, 求解后得到

$$h^2 = 2 \pm (4 - t^2)^{1/2}$$
.

因为弦BD所对之弧为劣弧, h表示此弧一半所对之弦, 所以在上式中应取负号, 开平方, 最后得到

$$h = [2 - (4 - t^2)^{1/2}]^{1/2}$$
.

$$x/(1-x) = 1/x$$
 $x^2+x-1=0$,

因此(精确到四位小数)

$$x=(\sqrt{5}-1)/2=0.6180$$
.
由此得知,在单位圆中,
crd 36°=0.6180 12 .

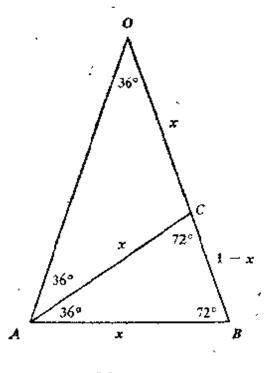


图 35

6. 因为在单位圆中, crd 60°=1. 所以由推 论 2 可知: 在单位圆中, 有

$$\operatorname{crd} 24^{\circ} = \operatorname{crd} (60^{\circ} - 36^{\circ}) = 0.4158.$$

7. 根据推论 3,我们可以相继算出单位圆中 与 10°,6°, 3°,90′和45′等角相对之弦,得到

8. 根据关系式

$$\frac{\sin a}{\sin b} < \frac{a}{b}$$
, $b < a < 90^\circ$

(正如前面所指出的,阿利斯塔克已经知道与此不等式等价的一

¹⁾ 当然,这就是在第五讲中讨论的黄金比,

个事实),我们有

crd 60'/crd45' < 60/45 = 4/3,

或者

 $crd 1^{\circ} < (4/3)(0.0131) = 0.01747.$

同样,

crd 90'/crd60' < 90/60 = 3/2,

或者

 $\operatorname{crd} 1^{\circ} > (2/3)(0.0262) = 0.01747.$

由此可知: crd 1°=0.0175, 精确到四位小数:

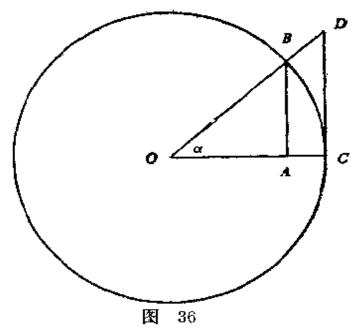
- 9. 根据推论 3, 可以求出crd 1/2°.
- 10. 现在, 我们就能编制单位圆的间隔为1/2°的弦表.

后来在实用三角学方面进行的许多工作,都是设法编制更好的三角函数表。例如,十世纪的穆斯林数学家阿卜尔·维法(Abû'l-Wefâ,940—998)计算出一个间隔为15'的正弦和正切表。后来,奥地利数学家G. von 波伊巴赫(Peurbach,1423—1461)计算出一个正弦表,德国数学家J.米勒(Müller,1436—1476)节计算出一个正切表。十六世纪杰出的日尔曼数学家G.J.拉科提库斯(Rhaeticus,1514—1576),使用租来的计算器,花了十二年的时间,编制了两个很有名的、至今还有用的三角函数表。一个是间隔为10°的、十位数字的六种三角函数表;另一个是间隔为10°的、十五位数字的正弦表(并带有第一、第二和第三插值)。有趣的是,著名的《CRC 数学用表手册》(CRC Handbook of Tables for Mathematics)的数学编委会甚至建议在这本手册的第五版中删去三角函数表,因为广泛使用的计算器要比这些数表 优越 得多。

在本讲的结尾,我们简单说明一下目前采用的这些三角函数 名称的意义"。除了正弦(sine)以外,其他三角函数名称的意义从相

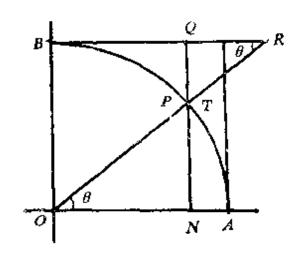
¹⁾ 通常称为置琼蒙坦努斯 (Regiomontanus),即他的出生地哥尼斯堡 (Königsberg)的拉丁化形式 (king's mountain).

应函数的几何解释中即可看出,这时把所考虑的角取为单位圆的圆心角.例如,在图36中,如果圆的半径为1,则正切 tga 和正割 seca的大小等于切线(tangent)段CD和割线(secant)段OD的长度、当然,余切(cotangent)的意义不过是"余角的正切"(complement's tangent),依此类推.正切、余切、正割、余割,这些函数曾经有过许多其他名称,现在采用的名称是直到十六世纪末才出现的.



"正弦"一词的英文是sine,它的来源比较深远。印度数学家阿耶波多(Aryabhata,约475—约550)长老把它称为 $ardh\hat{a}-iy\bar{a}$ (半弦),也称为 $iy\bar{a}-ardh\hat{a}$ (弦之半),后来又简写为 $iy\bar{a}$ (弦)。阿拉伯人把 $iy\bar{a}$ 音译为 $i\hat{i}ba$,根据阿拉伯文中省略元音的习惯,又把

¹⁾ 西方的三角学于明末 (1631年) 传入我国,旧称"八线",因为八个三角 函数之值时用图中的八条线段来表示, 正弦 sin $\theta = NP$,余弦 cos $\theta = ON$,正切 $ig\theta = AT$,余切 cig $\theta = BR$,正割 sec $\theta = OT$,余割 csc $\theta = OR$,正矢 vers $\theta = NA$, 余矢 cover s $\theta = PQ$. ——译者注



它简写成ib. 然而,iîba一词只在学术研究上使用,而在阿拉伯文中并无意义。后来的作者遇到ib,作为iiba的缩写,但是他们只懂阿拉伯文而不懂梵文,就用含有同样字母的 jaib 来代 替;jaib才是阿拉伯文中的一个词,意思是"小海湾"。当克雷莫纳的盖拉尔多(Gherardo of Cremona, 1114—1187)把阿拉伯的文献译成拉丁文时,他用拉丁文中相应的词sinus来代替阿拉伯文jaib。最后sinus又演变成英文的sine(正弦)。

习 题

10.1 试根据函数 sin x和 tg x的图形,证明: 当x从 0 增加到 π/2时, (sin x)/x递增, (tg x)/x递减,由此证明不等式

$$\frac{\sin a}{\sin b} < \frac{a}{b} < \frac{\tan a}{\tan b}$$

其中 $0 < b < a < \pi/2$.

10.2 试证明:本讲中的推论1,2和3,等价于三角恒等式 $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$, $\sin(\theta/2) = [(1-\cos\theta)/2]^{1/2}$,

其中 $0<\alpha$, β , $\theta/2<\pi/2$.

- 10.3 试证明托勒密定理的下述结果:
- (a) 如果P是等边三角形ABC的外接圆的弧 AB 上的一点,则PC = PA + PB.
- (b) 如果P是正方形ABCD的外接圆的弧 AB 上的一点,则 (PA+PC)PC=(PB+PD)PD.
- (c) 如果P是正五边形ABCDE的外接圆的弧AB上的一点,则PC+PE=PA+PB+PD.
- (d) 如果P是正六边形 ABCDEF 的外接圆的弧 AB 上的 一点,则PD+PE=PA+PB+PC+PF.
 - 10.4 处于三角形一边所在直线上但不与三角形的顶点重合

的一点, 称为在三角形这一边上的门内劳斯点, 试证明下列一系列定理, 其中一切线段都是有向线段, 一切角都是有向角:

(a) 门内劳斯定理. 设D, E, F分别是三角形 ABC 的三边 BC, CA, AB上的门内劳斯点, 则D, E 和F共线的充分必要条件是

$$\left(\frac{BD}{DC}\right)\left(\frac{CE}{EA}\right)\left(\frac{AF}{FB}\right) = -1.$$

(b) 如果把三角形BOC的顶点O与直线BC上的一点 D(不与B或C重合)相连,则

$$\frac{BD}{DC} = \frac{OB \sin BOD}{OC \sin DOC}.$$

(c) 设D, E, F分别是三角形ABC的三边CB, CA和AB上的门内劳斯点,O是空间中的一点(不在三角形ABC的平面内),则点D, E和F共线的必要充分条件是

$$\left(\frac{\sin BOD}{\sin DOC}\right)\left(\frac{\sin COE}{\sin EOA}\right)\left(\frac{\sin AOF}{\sin FOB}\right) = -1.$$

(d) 设D', E', F'分别是球面三角形A' B' C' 的三边B' C', C'A'和A'B'上的门内劳斯点,则D', E'和F' 同在球的一个大圆上的必要充分条件是

$$\left(\frac{\sin\widehat{B'D'}}{\sin\widehat{D'C'}}\right)\left(\frac{\sin\widehat{C'E'}}{\sin\widehat{E'A'}}\right)\left(\frac{\sin\widehat{A'F'}}{\sin\widehat{F'B'}}\right) = -1.$$

(这是门内劳斯在《球面学》一书中应用的球面情况的门内劳斯定理.)

- 10.5 试证明下列定理:
- (a) 三角形两边之积等于第三边上的高与其外接 圆 直 径 之积.
- (b) 设四边形ABCD内接于直径为t之圆.边AB,BC,CD,DA之长分别记为a,b,c,d.对角线BD,AC记为m和n,一对角线与另一对角线的垂线所成之角记为 θ .这时,有

$$mt\cos\theta = ab + cd$$
, $nt\cos\theta = ad + bc$.

(a) 在上述四边形中,有

$$m^{2} = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc},$$

$$n^{2} = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}.$$

(d) 如果在上述四边形中两对角线相互垂直,则

$$t^2 = \frac{(ad+bc)(ab+cd)}{ac+bd}.$$

(e) 托勒密第二定理·在上述三角形中,有

$$\frac{n}{m} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

对于有兴趣的读者,我们在这里叙述托勒密定理的一个扩充 和它的一个非常精采的推广,

托勒密定理的扩充。在凸四边形ABCD中,有 $(BC)(AD) + (CD)(AB) \geqslant (BD)(AC)$,

其中当且仅当四边形内接于一圆时等于成立.

托勒密定理的推广.设 $T_1T_2T_3T_4$ 是内接于圆C的凸四边 形, C_1 , C_2 , C_3 , C_4 是与圆C分别外切于 T_1 , T_2 , T_3 , T_4 的四个圆.这时,有

$$t_{12}t_{34} + t_{23}t_{41} = t_{13}t_{24},$$

其中 t_i ,是圆 c_i 与 c_i 的外公切线的长度。[这是 J. 凯西(Casey, 1820—1891)的更一般定理的特殊情况。]

参考文献

AABOE, ASGER, Episodes from the Early History of Mathematics (New Mathematical Library, No. 13). New York: Random House and L. W. Singer. 1964. (The New Mathematical Library became a publication series of the Mathematical Association of America, Washington, D.C., in 1975.)

HEATH, T.L., History of Greek Mathematics, 2 vols. New York: Oxford University Press, 1931.

第11讲

第一个伟大的数论学家

关于数的研究,有两方面的问题:探讨数与数之间的关系和发展数的计算技巧。对于古希腊人来说,前者称为算术(arithmetic),后者称为计算术(logistic).这种分类方法,经过中世纪,直到十五世纪末方才结束,那时出现了一些教科书,既研究数的关系,也研究计算技巧,面书名都用"Arithmetic".有趣的是,在欧洲大陆,现在所用的Arithmetic一词仍然具有其原始意义,而在英国和美国,Arithemetic一词的意义则与古代的 logistic一词相同。在这两个国家中,通常把研究数的理论方面的学科称为数论(number theory).

一般都认为,在数论发展过程中最初迈出的振奋人心的几步应归功于毕达哥拉斯及其继承人。毕达哥拉斯学派之所以重视数的研究,是由于他们的哲学认为:整数主宰宇宙万物。他们在这方面取得的许多成就,更加深了他们对于数的崇拜。例如,在公元大约320年,有影响的新柏拉图派哲学家伊安布利霍斯(Iamblichus)把亲和数的发现归功于毕达哥拉斯。两个正整数称为亲和数,如果其中任何一数都等于另一数的真因子¹⁾之和。例如,284和220是一对亲和数(据说是毕达哥拉斯发现的),因为220的真因子1,2,4,5,10,11,20,22,44,55和110,相加恰好等于284,而284的真因子1,2,4,71和142,相加恰好等于284,而284的真因子1,2,4,71和142,相加恰好等于200.这两个数曾被赋予一种神秘的色彩。人们相信:分别写着这两个数字的两块符咒可以确保其佩戴者亲密无间。这两个数曾在星占算命等鬼把戏中起着重要的作用。

¹⁾ 一个正整数 n 的真因子, 是指除了n 本身以外的 n 的一切正因子, 注意, 1 是 n 的一个真因子.

在发现最初的一对亲和数284和220以后很长一个时期内没有发现新的亲和数,直到1636年,伟大的法国数论学家 P. de 费马 (Fermat, 1601—1665)才发现另一对:17,296和18,416.两年以后,法国的数学家兼哲学家 R. 笛卡儿(Descartes)又发现了第三对.瑞士数学家 L. 欧拉(Euler)开始系统地寻找亲和数,并于1747年列出了30对,后来又扩充到60对.在寻找亲和数的过程中有一个趣闻。长期被忽略的、相当小的一对亲和数1184和1210,是直到1866年才由年仅16岁的意大利少年N. 帕加尼尼(Paganini)发现的.现在,我们已经知道一千多对亲和数.

亲和数的概念在现代又有了某些推广,例如,由三个或三个以上的数组成的一个循环序列,如果其中任何一个数的真因子之和都等于下一个数,则称为亲和数链(sociable chain of numbers),现在仅仅知道两个由1,000,000以下的数组成的亲和数链,其中一个由12,496开始,有五个"环"(F. P. 波利特(Poulet)发现了,另一个由14,316开始,有28个环、"恰好有三个环的亲和数链称为"伙"(crowd),目前尚未发现伙。

在占卜推理中应用的另一些具有奇特性质的数是所谓完全数、亏数和盈数。设N 表示正整数n的真因子之和,当N=n,N < n 或N>n 时,n 称为完全数、亏数和盈数。例如,6 (其真因子为1,2,3)是完全数,8 (其真因子为1,2,4)是亏数,m 12 (其真因子为1,2,3,4,6)是盈数。

在1952年以前,已经知道的完全数只有12个,全都是偶数,其中前三个是6,28和496. 欧几里得《原本》第九卷的最后一个命题证明:如果2"-1是素数",则2"-1(2"-1)是完全数.由欧几里得公式给出的完全数都是偶数,而且欧拉已经证明:每一个偶完全数必定具有这种形式.是否存在奇完全数,是数论中尚未解决

¹⁾ 也还知道某些由1,000,000以上的数组成的四链亲和数链.

²⁾ 大于1的整数,如果除了本身和1以外没有正整数因子,则称为素数.大于1的整数,如果不是素数,则称为合数.例如,7是素数,12是合数.

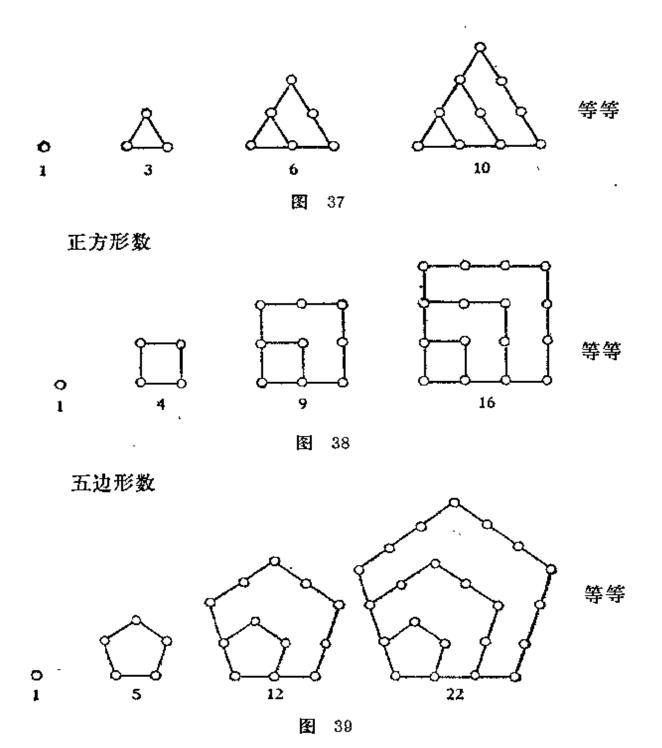
的著名问题之一,但是已经知道,如果存在奇完全数,那么它必定大于10¹⁰⁰,

1952年,使用SWAC 数字电子计算机又发现五个完全数,它们对应于欧拉公式中n=521,607,1279,2203和2281的情况。1957年,使用瑞典的BESK计算机又发现一个,对应于n=3217,1961年,使用IBM7090,又发现两个,对应于n=4253和4423.不存在对应于n<5000的其他偶完全数.进一步发现,当n=9,689,9,941,11,213,19,937,21,701,23,209时,都会得到完全数.结果,已知的完全数达到27个。

现代数学家把完全数的概念又作了某些推广·如果我们设 $\sigma(n)$ 表示 n 的一切因子(包括 n 本身)之和,则当且仅当 $\sigma(n)$ =2n 时 n 是完全数 · 一般地说,如果我们有 $\sigma(n)$ =kn, 其中k是自然数,
则称n是k重完全数 · 例如,可以证明,120 和 672 是三重完全 数 · 现在还不知道多重完全数的个数是否是无限的,更不必说普通的
完全数了 · 也还不知道是否存在奇的多重完全数 · 1944年,又产生了超盈数的概念 · 一个自然数 n 称为超盈数,当且仅当对于一切k<n, 有 $\sigma(n)/n$ > $\sigma(k)/k$ · 已经知道超盈数的个数是无限的 · 最近又定义了与完全数、亏数和盈数有关的另一些数,即所谓实用数(practical number)、拟完全数(quasiperfect number)、半完全数(semiperfect number)和奇异数 · (weird number) · 我们提到这些概念只是想要说明古代在数的研究方面所取得的成就,对于现代数的研究有着怎样的启示

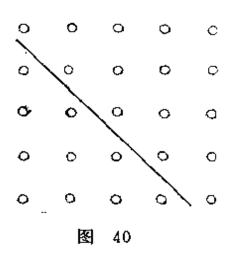
虽然我们不能完全肯定亲和数、完全数、亏数和盈数是毕达哥拉斯学派首先发现的,但是所谓多边形数无疑是由毕达哥拉斯学派的早期成员引入的.多边形数可以看成某些几何构形的节点的个数,它们反映了几何学与算术的联系.图37,38和39说明三角形数、正方形数、五边形数等命名的几何依据.

三角形数



还有许多关于多边形数的有趣的定理,这些定理是很容易由相应数的图形表示证明的.例如,我们考虑下述定理:

- 1. 任何正方形数都是两个相继的三角形数之和(见图40.)
- 2. 第n个五边形数等于 n 加第n-1个三角形数的三倍. (图 41.)



3. 从1开始的任何个相继的奇数之和都等于一个正方形数.(图42.)

当然,这些定理用纯代数的方法也能证明,但是一些关于多边形数的较深入的性质,用代数方法是不易证明的.

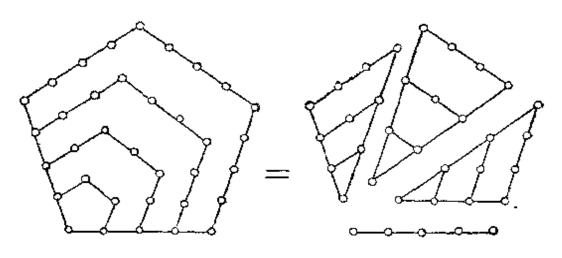
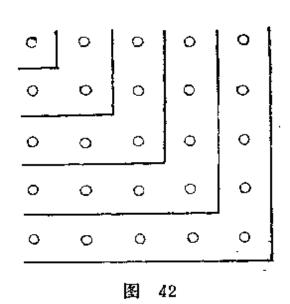


图 41



素数是形成(通过乘法)一切其他整数的基本元素,从古希腊时代到现在,它们一直是人们热衷研究的对象,欧几里得在《原本》第九卷的命题20中证明:素数的集合是无限的.P.G.L.狄利克雷成功地证明了这个定理的一个精彩推广:任何算术序列

 $a, a+d, a+2d, a+3d, \cdots$

(其中 a 和 d 是互素的)都含有无限多个素数.这个结论的证明,是

很不容易的.

关于素数所发现的一个最引人注目的结果,或许就是所谓素数定理. 假设 A_n 表示小于正整数n的素数的个数,素数定理说的是. 当n无限增大时,

$$(A_n \log_a n)/n$$

趋向于 1. 换句话说, A_n/n(称为前n个正整数中素数的密度)逼近于1/log,n, 当n逐渐增加时, 逼近的程度不断改善. 这个定理是C. F. 高斯(Gauss, 1777—1855)在十五岁时通过考察一个很大的素数表而猜想出来的,在1896年由法国数学家 J. 阿达玛(Hadamard)和 C. J. de la V. 普森(Poussin)分别独立地给出了证明.

为了研究素数,需要使用很大的因数表,1.H. 拉恩(Rahn)在 1659年作为一本代数书的附录发表了一个包括直到24,000的一切 数的因数表. 1668年, 英国的J. 佩尔(Pell) 又把这个因数表扩大 到100,000. 在德国数学家J. H. 兰伯特(Lambert)的号召下,维 也纳的一位中学校长 A. 费尔克尔(Felkel)算出了一个相当 庞 大 但仍未完结的因数表,费尔克尔的因数表的第一册给 出 了 直 到 408,000的一切数中的因数,是在1776年出版的,耗费了奥地利帝 国的大量钱财、但是、订购这本书的人极少、因而财政部收回了 几乎全部成品,作为废纸来制造子弹",用于同土耳其进行 的 战 争・在十九世纪,由于彻内克(Chernac)、伯克哈特(Burckhardt)、 克雷尔(Crelle)、格莱谢(Glaisher)以及才思敏捷的 计 算 家 戴 斯 (Dase)等人的共同努力,得到了一个包括直到10000000的一切数 的因数表,分十册出版.但是,这方面的最大成就是布拉格大学 的J. P. 库利克(Kulik, 1773—1863)算出的因数表. 他花费了二 十年的业余时间,完成了一部尚未发表的手稿, 其中 包 括 直 到 100000000 的一切数的因数,一般可以找到的最好的因数表是 美

¹⁾ 当时的子弹壳由金属和纸板制成。——译者注

国数学家 D. N. 菜默(Lehmer, 1867—1938)编制的,它只有一卷,却收集了直到 10000000 的一切数的因数. 莱默指出,在库利克的因数表中存在错误.

关于素数,存在许多尚未解决的著名问题,足以编成一本小册子,例如,是否存在无限多个形如n²+1的素数?在n²和(n+1)²之间是否总存在一个素数?是否从某一个数以后任何正整数n,或者为一个平方数,或者为一个平方数与一个素数之和?是否存在无限多个费马数,即形如2²*+1的素数?

引起古希腊人注意的另一些数的集合是所谓毕达哥拉斯三数组.一个毕达哥拉斯三数组是指这样三个正整数(a, b, c),它们满足a²+b²=c².由此可知, a, b, c可以作为一个直角三角形的两直角边和斜边的长度.这样的直角三角形称为毕达哥拉斯三角形.例如,(3, 4, 5),(5, 12, 13)都是毕达哥拉斯三数组,对应于两个毕达哥拉斯三角形 3-4-5 和 5-12-13.已经发现,古代巴比伦人在公元前1600年以前就掌握了求毕达哥拉斯三数组的一种方法.从古至今,已发表了大量的研究毕达哥拉斯三数组的文献.

在数学史上有一位杰出的数学家,他或许是数论这一领域中的第一个真正的天才,由于他的一部著作对于后世欧洲的数论学家产生了深远的影响,所以可以把这部著作的出现称为数学史上的一个里程碑.这位数学家就是亚历山大里亚的丢番图(Diophantus of Alexandria),这部名著就是他的《算术》(Arithmetica)一书.虽然有人说他是公元一世纪人,但是证据不足,大多数历史学家倾向于认为他生在三世纪.关于他的生平,世人所知甚少,只是知道他活跃于亚历山大里亚.

丢番图写了三部著作:《算术》,原有十三卷,现存六卷;《论多边形数》(OnPolygonal Numbers),现存其中一些片断;《衍论》(Porisms),已逸失。

《算术》一书是一部具有高度创造性的伟大著作、它对代数数

论作了解析处理,这说明它的作者是一位技巧高超的数论大师.这部著作已有许多评注者,其中J. 雷琼蒙塔努斯(Regiomontanus)在1463年建议把现存的希腊文本译成拉丁文. 西兰德(Xylander,海得堡大学教授W. 霍尔兹曼(Helzmann)的希腊文名字〕于1575年响应了这一号召,完成了一部很值得称赞的拉丁文译稿,并作了很有价值的评注. 法国人巴歇·德·梅齐里阿克(Bachet de Méziriac)利用西兰德的译稿,于1621年出版了第一个希腊文版本,并带有拉丁文的译文和注释. 巴歇的译本的第二版于1670年出版(可惜印刷质量很差). 这个版本在历史上特别重要,因为它包含着P·de费马所做的一个著名的页边注(已编入正文),这个页边注引起了关于数论的广泛研究. 后来又出现了《算术》一书的法译本、德译本和英译本、

《算术》一书现存部分讲的是大约 130 个问题的解法,这些问题内容相当广泛,可以归结为一次和二次方程,还解出了一个很特殊的三次方程。第一册涉及一个未知数的确定方程,其他各册涉及两个和三个未知数的二次不定方程。这里显然没有给出一般解法,而是针对每一个具体问题的需要,设计一些巧妙的数学方法,因为丢番图只承认正有理数解,并且在大多数情况下,只要对于一个问题找到了一个答案,他就满足了,虽然还可能存在许多不同的答案。

《算术》一书叙述了一些关于数的深奥定理.例如,我们可以看到这样一个命题.两个有理数的立方差也是两个有理数的立方和(没有给出证明,但是提到了《衍论》一书),后来 F. 韦达(Viète)、巴歇·德·梅齐里阿克和P. de费马等人对此都做过研究.书中有许多关于把数表示为两个、三个或四个平方数 之和 的定理,这是后来 P. de 费马、L. 欧拉和 J. L. 拉格朗日充分研究的一个领域.下面列出在《算术》一书中可以见到的一些问题,这些问题是很有趣的,并且其中许多都是较难的.应当记住.这里所谓"数"都是指"正有理数".

第一卷问题17¹⁾: 试求四个数,使其中每三个数之和分别等于给定的四个数, 譬如说 22, 24, 27 和 20.

第二卷问题18: 试求两个平方数,使得它们的积加上其中任何一个数,都等于一个平方数.(丢番图的答案是(3/4)²,(7/24)².)

第三卷问题 6. 试求三个数,使得它们的和等于一个平方数,其中任何两数之和也等于一个平方数.(丢番图的答案是80,320,41.)

第三卷问题 7: 试求三个数,使得它们构成算术序列,而其中任何两数之和都等于一个平方数.(丢番图的答案是120¹/₂,840 ¹/₂,1560¹/₂)

第三卷问题13. 试求三个数,使得其中任何两数之积加上第三个数,都等于一个平方数.

第三卷问题15. 试求三个数,使得其中任何两数之积加上这两数之和,等于一个平方数.

第四卷问题10: 试求两个数,使得它们的和等于它们的立方和,(丢番图的答案是5/7,8/7)

第四卷问题21: 试求三个数, 使得它们构成几何级数, 而其中任何两数之差都等于一个平方数. (丟番图的答案是: 81/7, 144/7, 256/7).

第六卷问题 1. 试求一毕达哥拉斯三数组,使得相应直角三角形的斜边减去任何一个直角边都等于一个立方数(丢番图的答案是40-96-104.)

第六卷问题16: 试求一毕达哥拉斯三数组,使得相应直角三角形的一个锐角的平分线的长度为一个有理数.

对于一些不定的代数问题,我们只要求得到有理数解,称之为丢番图问题。但是,在现代使用这个术语时,表示仅限于求整数解,应当指出,这一类问题不是丢番图首先提出的,但是,他

¹⁾ 问题的编号是T.L.希思(Heath)在《亚历山大里亚的丢番图》(Diophantus of Alexandria)—书第二版中给定的。

具有处理这种问题的非凡才能.

在本讲的最后,我们介绍一个最著名的丢番图问题,《算术》 一书第二卷的问题8说的是:"试把一个给定的平方数分成两个平 方数",费马在《算术》一书的一个巴歇的译本上写出了下 述 引人 注目的边注: "要想把一个立方数分成两个立方数,把一个四次 幂分成两个四次幂,一般地说,把一个任何高于二次的幂分成两 个同次幂,都是不可能的.对此,我确已找到一个巧妙的证明, 但是纸边太窄,无法写下。"换句话说,费马声称他已经 证 明了 这一事实:不存在正整数x, y, z, 使得 $x^n + y^n = z^n$, 其中 n > 2. 这个非凡的命题称为费马最后"定理",然而,费马是否真的找到 了正确的证明,这或许将成为千古一谜,自费马之后,有许多杰 出的数学家煞费苦心,试图解决这个难题,但是对于一般情况, 至今仍未获得证明.对于n=4的情况,费马在另一个地方给出了 证明,对于n=3的情况,L.欧拉(Euler)给出了证明(后来又由 別人做了改进). 大约在1825年, A. M. 勒让德(Legendre)和P. G. L. 狄利克雷独立地证明了n=5的情况,在1839年,G. 拉梅 (Lame)证明了n=7的情况. 德国数学家E. 库默尔(Kummer, 1810 —1893)在费马问题研究方面取得了重大进展,1843年他向狄利克 雷提交了一份自己的证明,但是狄利克雷指出在他的推理中存在 错误,于是,库默尔更加发奋,潜心研究这个问题,几年以后, 他发展了高等代数的一个重要的相关分支——理想论,从而导出 了关于费马关系式可解性的几个非常一般的条件,以后有关这个 问题的几乎所有重要成果,都是以库默尔的研究为基础的。现在 已经知道,对于小于100000的一切n,以及许多其他特定的n值, 费马最后"定理"肯定成立,1908年,德国数学家 P. 沃尔夫斯凯 尔(Wolfskehl)把100000马克的遗产捐赠哥廷根科学院,作为给予 第一个彻底证明这个"定理"的人的奖金. 结果,一些争名逐利之 徒竟相声称自己已获得证明,此后,这个问题同三等分任意角和 化圆为方问题一样,一直吸引着许多数学爱好者,对于费马最后 "定理"这个极其著名的数学问题,至今已发表了大量的错误证明.

习 题

- 11.1 (a) 试证明: N. 帕加尼尼数1184和1210是亲和数:
- (b) 泰比特·伊本柯拉(Tâbit ibn Qorra, 826—901)发现了求亲和数的下述法则:如果 $p=(3)(2^n)-1$, $q=(3)(2^{n-1})-1$, $r=(9)(2^{2^{n-1}})-1$ 是三个奇素数,则 2^npq 和 2^nr 是一对亲和数.试对于 n=2 和 n=4 验证这个法则.
- 11.2 (a) 试证明: 在阿基米德的完全数公式中, n 必 须是素数.
 - (b) 根据欧几里得公式所得到的第四个完全数是什么?
 - (c) 试证明: 一个完全数的一切因数的倒数之和必定等于 2.
 - 11.3 (a) 试证明:如果 p 是素数,则 p" 是亏数.
- (b) 试求小于100的21个盈数.可以看出,它们全都是偶数. 试证明: 945=3³·5·7是盈数,由此可知并非一切盈数 都是 偶数,而 945 这个数是第一个奇盈数.
 - (c) 试证明: 盈数或完全数的任何倍, 都是盈数.
 - 11.4 (a) 试列出前四个多边形数.
 - (b) 试证明: 第n个三角形数和第n个五边形数分别由公式 $T_n=n(n+1)/2$ 和 $P_n=n(3n-1)/2$ 给出.
- (c) 试对本讲正文中给出的关于多边形数的三个定理补充代数论证.
- (d) 在列数比行数多 1 的长方形点阵中,总的点数称为长方形数,试用几何方法和代数方法证明:前 n 个正偶数之和是长方形数,
- (e) 试用几何方法和代数方法证明: 任何长方形数都是一个 三角形数的二倍:

- (i) 试用几何方法和代数方法证明:任何三角形数的 8 倍, 再加 1,等于一个正方形数.
 - (g) 试证明:每一个偶完全数也是一个三角形数:
 - (h) 试证明: m 边形数的序列由公式 $an^2 + bn$, $n = 1, 2, \cdots$

给出, 其中a, b是一对固定的有理数.

- (i) 对于(h)中的结论, 试求当 m=7 时的 a 和 b.
- 11.5 (a) 埃拉托色尼(Eratosthenes, 公元前约230年)因发现了数论中的筛法,即求小于给定的数 n 的一切素数的一种方法而闻名于世.从 3 开始,写出一切小于 n 的奇数.在这个数列中,从 3 以后,每数到第三个数,就把这个数画掉;然后,从下一个保留的数 5 以后,每数到第五个数,就把这个数画掉;然后,再从下一个保留的数 7 以后,每数到第七个数,就把这个数画掉;然后,再从下一个保留的数 11以后,每数到第十一个数,就把这个数画掉;如此继续进行下去.在这个过程中,有一些数不只画掉一次.最后,所有保留的数,连同数 2,构成了小于 n 的一切素数的序列.

试应用埃拉托色尼的筛法,求一切小于500的素数。

- (b) 试证明: 如果正整数 ρ 没有不超过满足条件 $q^2 < \rho$ 的 最大整数 q 的素因数,则 ρ 是素数。这个定理表明,在埃拉托色尼筛法的消去过程中,只要达到素数 $\rho > \sqrt{n}$,便可停止,因为从 ρ 以后,每数到第 ρ 个数,把这个数消去,这不过是重复消去已经消去的数。因此,在求小于500的素数时,只要从 19 以后,每数到第十九个数,就把这个数画掉,到此便可结束,因为下一个素数23已经大于 $\sqrt{500}$.
 - (c) 试对于n=500, 10^8 和 10^9 , 计算($A_n \log_e n$)/n.
 - (d) 试证明: 不论n多么大,总可以找到n个相继的合数,
 - 11.6 (a) 试证明: 对于任何正整数 m, 三个数

2m, m^2-1 , m^2+1

构成毕达哥拉斯三数组, 毕达哥拉斯学派已经知道这个结果,

- (b) 试证明: 不存在边长为整数的等腰直角三角形,
- (c) 试证明: 在任何毕达哥拉斯三数组中,一个数不能是另 外两个数的比例中项。
- (d) 如果毕达哥拉斯三数组的三个数不含大于1的公因数,则称为基本毕达哥拉斯三数组。例如,(3, 4, 5)是基本三数组,(6, 8, 10)则不是。可以证明,一切基本毕达哥拉斯三数组(a, b, o)由参数表示式

$$a=2uv$$
, $b=u^2-v^2$, $c=u^2+v^2$.

给出,其中 u 和 v 是互素的,一个是奇数,一个是偶数,且u>v. 例如,如果 u=2,v=1,则得到基本三数组a=4,b=3,c=5. 试求16个基本毕达哥拉斯三数组(a,b,c),其中 b 是偶数,c<100.由此证明:恰好存在100个不同的毕达哥拉斯三数组(a,b,c),其中 c<100.

(e) 试证明:如果(a, a+1, c)是毕达哥拉斯三数组,则 (3a+2c+1, 3a+2c+2, 4a+3c+2)

也是毕达哥拉斯三数组,因此,由一个已知的两直角边是相继自 然数的毕达哥拉斯三数组,可以得到另一个边长较大的三数组, 其中两直角边也是相继的自然数.

- (f) 试由毕达哥拉斯三数组(3,4,5)出发,再求出五个 毕达哥拉斯三数组,使得在每一组中两直角边是相继的自然数,而边长依次增大。
- (g) 试证明: 对于任何自然数 n>2, 都存在一个毕达哥拉斯三数组,它的一个直角边等于 n.
- (h) 试证明: 一个直角边等于给定数 a 的毕达哥拉斯三数组的个数是有限的.
 - 11.7 (a) 试求解《算术》第一卷的问题17.
- (b) 在直角三角形ABC中, $\angle C$ 是直角,AD平分 $\angle A$. 试求解《算术》第六卷的问题 16,方法是求出对应于 AB,AD,AC,

BD, DC的一组最小整数, 使得DC:CA:AD=3:4:5.

(c) 设 m 是任何正整数,而

$$x=m^2$$
, $y=(m+1)^2$, $z=2(x+y+1)$,

试证明: 六个数

$$xy+x+y$$
, $yz+y+z$, $zx+z+x$, $xy+z$, $yz+x$, $zx+y$

都是平方数, 并且证明: 这就解出了《算术》第三卷的 问 题 13 和 15.

- (d) 生活在十九世纪的数学家 A. 德·摩尔根(De Morgan) 提出过一个谜语: "在 x² 年, 我 x 岁", 试问他生于何年?
- 11.8. 古代印度人解出了下述问题: 试求线性不定方程 ax + by=o的一切整数解, 其中 a, b, o 都是整数.
- (a) 设ax + by = c 具有整数解,试证明: a + a + b 的最大公因数是c的一个因数.(这个定理说明: 假设 a + a + b 是互素的,并不会失去一般性.)
- (b) 设 x_1 和 y_1 是 ax + by = c 的一组整数解,其中 a 和 b 是互素的,试证明: 一切整数解由 $x = x_1 + mb$, $y = y_1 ma$ 给出,其中 m 是任意整数. (这个定理说明: 只要能求出一组整数解,便可得到一切整数解.)
 - (c) 试求 7x + 16y = 209 的正整数解.
 - (d) 试录 23x+37y=3000 的正整数解.
- (e) 用一角和二角五分两种钱币付款五元,试问能有多少种方式?
- 11.9 印度数学家摩诃毗罗(Mahāv ra,约850年)提出过一个不定问题: "有63堆大蕉,各堆个数相等,再加上7个大蕉,平均分给23人,恰好分尽,请告诉我每堆大蕉的个数,"试求这一问题的最小可能解,
- 11.10 (a) 试证明: 为了证明费马最后"定理", 只须 考 虑 素数指数p>2即可.

- (b) 假设费马最后"定理"成立,试证明: 曲线 x'' + y'' = 1(n)大于 2 的正整数)不含坐标为有理数的点,只有曲线与坐标 轴 的交点例外.
- (c) 费马证明了边长为整数的直角三角形的面积不可能是平方数. 假设这一事实成立,试证明,方程 $x^4-y^4=z^2$ 没有正整数 g(x), y, z, 然后证明费马最后"定理"的 n=4 的情况.

参考文献

HEATH, T. L., Diophantus of Alexandria, rev. ed. New York: Cambridge University Press, 1910.

SIERPINSKI, WACLAW, A Selection of Problems in the Theory of Numbers, tr. by A. Sharma, New York: Pergamon Press, 1964.

SIERPINSKI. WACLAW, Pythagorean Triangles. tr. by A. sharma. New York: Yeshiva University. 1962.

第 12 讲

代数学的简写

中学生在学习数学时会觉得代数学是一门高度 符号 化 的学科,这正好同几何学相反,在代数学中,充满了各种符号,例如加号、减号、除号、字母表中的后几个字母(代表未知量)和前几个字母(代表已知量)、表示运算次序的各种符号(小括号、中括号、大括号)、指数、下标、根号、等号、阶乘符号、组合和排列符号、对数符号,等等,但是,在学生当中很少有人知道,这种符号表示法仅仅有四百多年的历史,实际上大多数符号的出现还不到四百年.

在1842年, G. H. F. 内塞尔曼(Nesselmann)首先把代数学符号化的历史过程划分为三个阶段,第一个阶段是文字表示的代

数学,其中问题的解法完全用文字来叙述,而没有任何简写和符号,第二个阶段是简写的代数学,其中采用速记式的简写来表示一些经常出现的量、关系和运算,最后一个阶段是符号代数学,这时问题的解法大都用数学速记法来表达,其中采用的各种符号同它们所表示的实际内容和思想几乎没有什么明显的联系.

可以说丢番图时代(公元250年前后)以前的一切代数学都是文字表示的. 丢番图对于代数学发展的重大贡献之一, 就是简写了希腊代数学. 但是, 必须承认, 文字表示的代数学在世界其他地区一般都持续存在了几百年之久(正如后面还要说明的, 只有印度例外). 特别是在西欧, 十五世纪以前的代数学几乎都是文字表示的, 直到十五世纪才开始出现一些简写的特例. 符号代数学十六世纪在西欧就已经出现, 但是发展缓慢, 直到十七世纪中期才得到推广.

我们所能见到的古希腊代数问题的主要来源,或许就是文法 学家梅特罗佐鲁斯(Metrodorus)在公元 500 年前后编 写的《选集》 (Palatine Anthology)一书,书中收入了以警句形式叙述的 46 道数 值问题。在达些问题中,有的可能是作者本入提出的,但是,可 以相信,大多数问题很久以前就已经存在,这些问题显然是用来 训练思维的,属于柏拉图所说的类型,同在兰德纸草书中发现的 一些问题十分相近,其中大约半数可以归结为简单的一元一次方 程,有十几道题可以化为二元一次方程组,有一道题可以化为三 个三元一次方程,有一道题可以化为四个四元一次方程,而另外 两道题则可导致一次不定方程,这些问题中的大多数,同目前中 学代数课本中的一些标准类型的问题(例如,分配问题、工程问 题、排灌问题、混合问题、年龄问题,等等)非常相似,虽然, 一股说来,用现代的符号代数来解这些问题不会有任何困难,但 是必须承认,如果要用文字来叙述解法,那么还是需要动一动脑 筋的, 如果不信的话,就请设法完全用文字来说明下面这些从《选 集》一书中随意选出的例题的解法:

- 1. 〔分配问题〕 六个人分苹果,其中四个人分别得到总数的三分之一、八分之一、四分之一和五分之一,第五个人得到十个苹果,还剩一个苹果留给第六个人,试问有多少苹果?
- 2. 〔年龄问题〕 某人一生, 童年占四分之一, 青年占五分之一, 壮年占三分之一, 还有13年为老年, 试问他活了多少岁?
- 3. 〔工程问题〕 制砖匠,今天是晴天,我得赶快把这间房子盖起来,我还需要300块砖.你一个人一天正好能做300块.你的儿子一天能做200块,你的女婿一天能做250块.如果请你们三人一起来工作,那么需要多少时间能够完成?
- 4. 〔排灌问题〕 我是一只铜狮子,我的两眼、嘴和右脚掌都是出水孔.我的右眼灌满一坛水需要两天的时间(一天按12小时计),左眼需要三天,右脚需要四天,而嘴则需要6小时.如果四个出水孔一起来放水,那么需要多少时间才能灌满一坛水?
- 5、〔混合问题〕 用金、铜、锡和铁来制作一顶王冠,总重 60mina¹⁾. 金和铜应占总重的三分之二,金和锡应占总重的四分之三,金和铁应占总重的五分之三,试问需要金、铜、锡、铁各多少?

丢番图的《算术》一书的产生之所以称得上是数学史上的一个里程碑,这不只是因为象在上一讲中所看到的,它的关于数论的内容十分重要,影响深远,而且还因为象下面将要说明的,在这部著作中我们可以发现向着代数学符号化迈进的最初几步,这些进步实际上就好象速记中采用的简写一样。

在《算术》一书中,我们看到表示未知数、未知数的直到六次的幂、相减、相等和倒数的简写符号。英文中的"arithmetic"(算术)一词来自希腊文的"arithmetike",它是由"arithmos"(数)和"techne"(科学)两词结合而成。T. L. 希思(Heath)相当有把握地认为: 丟番图用来表示未知数的符号是由"arithemos"这个词的前两

¹⁾ mina为古希腊等地的货币单位和重量单位,约4镑.--译者注

个希腊字母 α 和 ρ 拼合而成,结果恰好就像是它的最末一个希腊字母 s.虽然这只是一种猜测,但是表示未知数之幂的符号的 意义却不必怀疑。例如,"未知数的平方"由 Δ^r 来表示,这是"dunamis" (Δ^r NAMI Σ ,意为"平方")一词的前两个字母。"未知 数 的立方"由 K^r 来表示,这是"kubos"(K^r BO Σ ,意为"立方")一词的前两个字母。对于未知数的随后几次幂的表示法。 $\Delta^r \Delta$ (平方-平方)、 ΔK^r (平方-立方)和 K^r K (立方-立方),也不难给出解释。丢番图用来表示"减"的符号看起来很像是 V 的倒置,再加上这个角的平分线。这可以解释为希腊文"leipis"(ΔE I V I Σ ,意为"缺少")一词中的两个字母 ΔT 和 I 的 拼合。在一个表达式中,并列写出的两项表示"相加",所有的负项集中到一起,前面写一个减号。任何未知数之幂的数字系数用相应的希腊字母来表示,写在表示这个幂的符号之后。如果存在常数项,则用 ΔT 来表示,后面写上相应的数字系数,这里 ΔT 是不能文中"monades (ΔT) 一词的缩写。希腊字母与数字之间的对应关系是:

1	α	alpha	60	ξ	xi
2	β	beta	70	o	omicron
3	γ	gamma	80	$.\pi$	pi
4	δ	delta	90	已度	医弃的 koppa
5	ε	epsilon	100	ρ	rho
6	已废弃的digamma		200	σ	sigma
7	ζ	zeta	300	τ	tau
8	η	eta	400	υ	upsilon
9	θ	theta	500	¢	phi
10	1	iota	600	x	chi
20	tc	kappa	700	ψ	psi
30	λ	lambda	800	ω	omega
40	μ	mu	900	已是	连奔的sampi
50	ν	nu			

作为这些数字符号的应用实例,我们有

 $13 = i \gamma$, $31 = \lambda \alpha$, $742 = \psi \mu \beta$.

更大的数字则通过增添,等符号来表示. 已废弃的digamma. koppa和sampi的写法如图43所示.

图 43

如果采用上述数字符号和简写规则,那么

 x^3+13x^2+8x 和 x^3-8x^2+2x-3 可以记为:

 $K^{\gamma} \alpha \Delta^{\gamma} \iota \gamma \varsigma \eta$ 和 $K^{\gamma} \alpha \varsigma \beta \uparrow \Delta^{\gamma} \eta M \gamma$, 分别读作:

未知数立方的 1 倍,未知数平方的 13倍,未知数的 8 倍和 (未知数立方的 1 倍,未知数的 2 倍)减(未知数平方的 8 倍,单位的 3 倍).

这样,文字表示的代数学开始转变成简写的代数学,这是数学史上的一个里程碑.

正如前面已经提到的,印度人也简写了他们的代数学。同丢番图一样,并列的两项通常也表示相加。相减时在被减数上面添加一个圆点,相乘时在因子的后面写上bha(为bhavita(乘积)一词的第一个音节),相除时把除数写在被除数的上面,开平方时在被开方数的前面写上ha(来自"karana"一词,意为"无理的")。婆罗摩笈多把未知数记为yā(来自"yāvattāvat"一词,意为"如此之多,以致")。为了表示已知整数,在前面加rā(来自"rūpa"一词,意为"绝对数")。其他未知数则采用不同颜色名称的第一个音节来表示。例如第二个未知数可以记为 kā(来自"kālaka"一词,意为"黑")。于是,

$$8xy + \sqrt{10} - 7$$

可以写成

十五世纪末和十六世纪初,一些意大利的数学家在他们的代数学中也引进了少许简写符号。例如,L·帕乔利(Pacioli,约1445一约1509)在《总论算术、几何、比例和比例性》(Summa de Arithmetica, Geometria, Proportions et Proportionalita, 1494)—书中采用的简写符号是: p(来自"piu"一词,意为"多")表示加,加(来自"meno"一词,意为"少")表示减,co(来自"cosa"一词,意为"事物")表示未知数x, ce(来自"censo"一词)表示 x², cu(来自"cuba"一词)表示x³,以及cece(来自"censocenso")表示 x⁴. 有时用记号 ae(来自"aequalis"一词)来表示相等。

由简写的代数学向符号代数学转变是比较快的。例如,1557 年R. 雷科德(Recorde, 约1510—1558)在《砺智石》(The Whetstone of Witte)一书中给出了我们现在采用的等号"="。他采用 一对同样的平行线段作为表示相等的符号,他解释说:"因为没 有两个别的事物比这两个线段更相同的了."1525年 C. 鲁多尔夫 (Rudolff)在顯为《求根术》(Die Coss)的一部代数学著作中引入我 们所熟悉的根号,"√",因为它很象小写的r(来 自"radix"一词). 1489年, J. 维德曼(Widman, 1462-1498) 在菜比锡出版了一 部算术书, 其中第一次出现了我们现在使用的 加 号"土"和 减 号 "一",不过当时这两个符号不是作为运算符号使用的,而只是表 示过剩和不足,加号很可能是拉了文中"et"一词的简写,它往往 用来表示相加,而减号则是表示相减的记号页的简写.对于这两个 符号,还有另外一些解释. 1514年,荷兰数学家 V. 赫克(Hoecke)把"+"和"-"作为代数运算符号使用,但是很可能以前 就 已 经这样使用了. 1572年, R. 邦贝利(Bombelli,约 1526-约1573) 出版了一部代数书,书中改进了代数运算符号.例如,复合表这 式 $\sqrt{7+\sqrt{14}}$, 如果使用帕乔利的符号, 则写成 RV7pR14, 其中 RV表示对后面整个式子取平方根,如果使用邦贝利的符号,则可 写成R「7pR14」, 邦贝利把平方根和立方根分别记为R4和Rc, 十

六世纪法国的伟大数学家F. 韦达(Viète, 1540-1603)对于代数 学符号化的发展作出了重大贡献,他用元音字母表示未知量,用 辅音字母表示已知量. R. 笛卡儿(Descartes, 1596-1650)在1637 年用字母表中后几个字母表示未知量, 而用前几个字母表示已知 量,这就是目前我们仍然采用的惯例,在韦达以前,通常使用不 同的字母或符号来表示一个量的各次幂; 韦达则使用 同一个字 母,再加以适当的说明,来表示这些幂.例如,韦达把我们现在 所写的 x, x², x³ 记为A、A quadratum、A cubum, 后来的一些作者 又简写成A, A4, A0. 笛卡儿还引入了我们现在采用的指数的统 一写法——x, x², x³等等. T. 哈里 奥 特(Harriot, 1560—1621) 在他去世以后方才发表的《实用分析术》(Artis analyticae praxis, 1631)一书中给出了我们所用的大于号">"和小于号"<".W.奥 特雷德(Oughtred, 1574-1660)特别强调数学符号的重要 性, 他 给出了150多个数学符号,其中只有三个符号保留下来了: 叉号 "×",表示相乘,四点"::",用于比例,以及我们经常使用的表 示二者之差的符号"~"..

L. 欧拉(Euler, 1707—1783)对于数学的符号化也做出了 重大贡献,他采用f(x)作为函数符号,用 ε 表示自然对数的底,用 Σ 作为级数中的求和号,用 i 表示虚数单位√-1. 符号n! (称为 n 的阶乘)是施特拉斯堡的 C. 克拉姆 普(Kramp, 1760—1826)在1808年引入的,他采用这个符号是为了避免从前使用的符号 n 在印刷上造成的困难. J. 沃利斯(Wallis, 1616—1703)首先比较全面地解释了零指数、负数指数和分数指数的意义,他引入了我们现在使用的无穷大号"∞". 早期的英国数学家 W. 奥特雷德、I. 巴罗(Barrow, 1630—1677)、D. 格雷戈里(Gregory, 1661—1708)使用符号π来表示一个圆的周长,英国数学家 W. 约奈斯(Jones, 1675—1749)在1706年发表的一篇作品中首先使用这个符号来表示圆周与直径之比. 但是,在欧拉于1737年采用这个符号以前,一般还不用这个符号表示圆周率。

习 题

- 12.1 试应用中学代数求解本讲中的问题1,2,3,4.
- 12.2 公元前四世纪希腊的一位名气不大的数学家西马里达斯(Thymaridas)给出了求解含有 n 个未知数、n个一次方程的一个特殊联立方程组的下述法则:如果已知 n 个量 x_i ($1 \le i \le n$)之和 S,以及其中一个特定的量 x_i ($1 \le j \le n$)与其他每一个量 x_k ($1 \le k \le n$, $k \ne j$)之和 s_{ik} ,那么这个量 x_i 可按下式求出:

$$x_{j} = \frac{\sum_{k \neq j} s_{j,k} - S}{n - 2}.$$

这个法则十分著名, 称为西马里达斯之花.

- (a) 试证明上述规则:
- (b) 试说明本讲中的问题 5 是西马里达斯之花的数值特例·
- 12.3 下述问题取自《选集》一书,它提供了丢番图一生的梗概:"他的童年占他一生的1/6,青年时期占1/12,再过(一生的)1/7后他结婚,婚后5年生了儿子,他的儿子活到他终年的一半,儿子死后他又活了4年."假设这一问题中所述情节是正确的,试问丢番图终年多少岁?
- 12.4 (a) 如果想用希腊字母数制写出一切小子1000的数, 那么需要记住多少个不同符号?
- (b) 在希腊字母数制中,为了表示1000,2000,…,9000,通常的做法是在表示1,2,…,9的符号上加"/"。例如,1000可以写成 α /. 而把10000记为M. 为了表示10000的倍数,则采用乘法原理。例如,把20000,300000和4000000写成 β M, λ M 和 ν M。试用希腊字母写出数值5780,72803,450082,3257888.
- (c) 试在希腊字母数制中建立10+10的加法表和10×10的乘 法表:

- 12.5 (a) 试用丢番图的简写符号写出 $2x^4-21x^3+12x^2-7x+33$.
- (b) 试用印度人的简写符号写出 $3xy + 2x + 2y + \sqrt{13} 8$.
- 12.6 (a) 试用邦贝利的符号写出表达式 $\sqrt{[\sqrt[3]{(\sqrt{68}+2)}-\sqrt[3]{(\sqrt{68}-2)}}$.
- (b) 邦贝利把√-11写成dimRq11. 试用现代符号写出在邦 贝利的著作中出现的下列表达式:

Rc[4pdimRq11]pRc[4mdimRq11].

12.7 韦达通过修饰一个方程的系数,把这个方程写成齐次的形式,他使用加号"+"和减号"-",但是不用等号,例如,采用他的写法,可以把方程

$$5BA^2 - 2CA + A^3 = D$$

写成

B 5 in A quad-C plano2 in A+A cub aequatur D solido. 注意这里怎样修饰系数C和D,才使得方程中的每一项都成 为三次的,试用非达的符号写出

$$A^3 - 3BA^2 + 4CA = 2D$$
.

参考文献

CAJORI, FLORIAN, A History of Mathematical Notations, 2 vols. Chicago: Open Court, 1928-1929.

HEATH T. L., Diophantus of Alexandria, rev. ed. New York: Cambridge University Press. 1910.

第 13 讲

计算方面早期的两项发现

虽然世界各国的语言和文字差异很大,但是人们用来进行算 术运算的数字符号和计算格式却几乎完全相同,

目前,在世界各地,一切数字都是用一种人们熟知的共同方式来表示的,即写成十个数字符号0,1,2,3,4,5,6,7,8,9的位值序列.这种表示法本身有助于建立一些简洁的算术运算格式(或方案),即所谓"算法",例如加法、减法、乘法、除法、开平方法、开立方法、求两个给定正整数的最大公因数的算法,等等.为了掌握这些基本算法,小学生们要花费相当多的学习时间,他们要学会利用两个熟记的简单运算表——加法表和乘法表来完成这些运算.这个世界通用的数字系统,称为印度-阿拉伯数系,其原因下面很快就会说明.

还有另一些早期的数系,但是考察以后发现,它们或者不够 紧凑,或者不适于建立容易应用的算法。例如,在第12讲中,我 们介绍过希腊字母数系。虽然这种早期的数系可以很紧凑地表示 数字,但是要使用大量的符号,难以记忆。作为另一个例子,我 们来考察许多人都很熟悉的罗马数系。我们试用这种数系来进行 长乘法、长除法,或者来开方,就会发现,除了简单的加法和乘 法以外,很难用这种数系来建立可行的算术运算格式。

印度-阿拉伯数系之所以这样命名,是因为人们相信它是 印度人发明的,阿拉伯人采用了,并把它传到西欧、现在所用数字符号的保存下来的最早样品,是在印度的一些石柱上发现的,这些石柱是公元前 250 年前后乌索库王建造的。至于印度的其他早期样品,如果解释正确的话,则是从公元前大约 100 年在靠近浦那的一座山上的窑洞墙壁上刻下的记录中和从公元前大约 200 年在纳西克窑洞中刻下的一些碑文中发现的。然而,在这些早期的

样品中,既没有零的符号,也没有应用位值表示法这一重要概念. 位值表示法和零的符号究竟是在什么时候引入印度的,还不得而 知,但是这必定发生在公元800年以前,因为波斯数学家花拉子 密(al—Khowârizmî)在公元825年写的一本书中曾描述过这样一种 完备的印度数系.

至于这些新的数学符号究竟是在什么时候和怎样 引进 欧洲的,还不清楚,很可能是由地中海沿岸的商人和旅行者们带过来的,在十世纪西班牙手稿中发现有这些符号,它们是由阿拉伯人传到西班牙的。阿拉伯人在公元 711 年侵入这个半岛并占领了好几百年。通过花拉子密的专著的十二世纪拉丁文译本以及后来欧洲人的有关著作(其中最有影响的一本在后面的一讲 中 将 要 讨论),这种数字系统得到了更广泛的传播:

也许有人要问,为什么古人没有发明更适用的数字系统,即 更便于建立简单计算格式的数字系统呢?换句话说,为什么在更 早的时候人们没有发明类似于阿拉伯-印度数系的数字系统,以及 加、减、乘、除、开平方、开立方等算法呢?有一个非常实际的 理由,可以说明这种发明迟迟未能出现的原因:如果不能供给大 量的、使用方便的、廉价的书写材料,任何人也无法设计这种数 字系统。要知道,我们通常使用的机制纸浆纸,只是在二百多年 前才出现。旧有的上等手工纸价格昂贵、很难得到,而且即使如 此,也还是直到十二世纪才引人欧洲的,虽然中国人在一千多年 以前就知道如何制造这种纸了"。早期的书写材料,例如石头和凿 子、泥版、沙盘、纸草纸、羊皮纸、犊皮纸等等,或者使用不便, 或者很难得到,以至不能用来打草稿。但是,为了找到满意的算

¹⁾ 长期以来,一些中外著作都认为造纸术是东汉蔡伦发明的,并把蔡伦于元兴元年(公元105年)向汉和帝刘隆献纸之时,作为造纸术发明的年代,现代更学家范文澜指出:"《汉书》外戚赵飞燕传载有一种可以写字叫做"赫蹄"的东西,应劭(东汉人)说是薄小纸,孟康(三国魏人)说是染赤色纸,如果应、孟所说不误,是汉成帝时早已有纸。"(见《中国通史简编》修订本第二编第164页。)汉成帝在位是在公元前32年至公元前8年,一一译者注

法,需要进行各种尝试,因而需要做大量的打草稿的工作.后来 广泛使用一些撒着薄薄一层红粉的白色小木板,打腊的木板、石 板,以及一些尖笔,这些书写工具很适合发展早期的算术方法. 由于面积有限,字迹容易擦除,所以在设计早期的算法时必须考 虑到节省篇幅,算法中的数字在起到作用以后立即抹去.因此, 只有重复整个计算过程,才能检查计算是否正确.我们目前使用 印度-阿拉伯数系进行运算的计算格式,其中大多数在十三世纪以 前都还没有达到最终的形式,对于这一点,人们往往并不了解.

那么,从前人们是怎样来进行算术计算呢?为了克服上述困难,人们发明了一种简单的、但极其重要的计算工具——算盘 (abacus).

算盘是一种十分古老的装置,究竟是什么时候出现的还不清楚,但是它是仅次于手指的、人类最早使用的计算工具。在古代和中世纪,世界各地,算盘的形式是不同的,使用算盘,可以进行加、减、乘、除、开平方和开立方等运算,在灵巧而有实际经验的人的手中,使用算盘可以非常迅速和准确地完成这些算术运算。

算盘的最原始的形式可能是一种有标志的沙盘,并因此而得 名(源于希腊文"abax"一词,意为沙盘). 古代的 埃 及、希腊、罗 马、印度和远东各国,人们使用的算盘具有不同的形式",一种比 较成熟的算盘的形式是一块木板,上面刻有槽线,槽线中放着一 些可以来回滑动的小石子(calculi),另一种形式是一个木 框,装 有金属丝或细竹棍,上面穿着可以滑动的数珠。

让我们来描述算盘的原始形式,并通过把一对罗马数字相加来说明它的用法。回四条竖直的平行线,从左到右记为M,C,X和I,取一些方便的筹码,譬如棋子或钱币。当把一个筹码放在I,X,C或M线上时,它分别表示1,10,100,1000。为了减少任何一条线上可能相继出现的筹码的数目,我们规定每当一条线上出现五个筹码时,就用置于这条线的左侧间隔处的一个筹

码来代替.这时,把这些间隔从左到右记为D,L和V.于是,任何小于10000的数都能通过放在这组直线(称为算盘框图)上的一些筹码来表示,其中放在任何一条线上的筹码不超过四个,放在任何两条线之间的间隔处的筹码不超过一个.

现在,让我们把两个罗马数字

MDCCLXIX 和 MXXXVII

相加,把第一个数用筹码表示在上述算盘框图上,如图44之左图 所示,现在来加第二个数,从右到左进行,为了加VII,在X线 和I线之间放入另一个筹码,在I线上放入两个筹码,这时,在

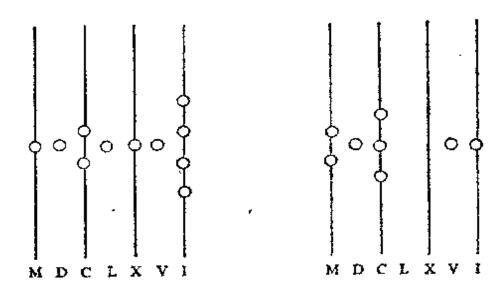


图 44

I线上已有六个筹码.于是,我们移去其中五个筹码,而在X线和I线之间加入另一个筹码.由于在X线和I线之间已有三个筹码,所以我们移去其中两个,"进位"到X线上,即在X线上加入一个筹码.现在来加XXX,在X线上再放入三个筹码.这时,在X线上共有五个筹码,于是移去这五个筹码,而在C线和X线之间另放一个筹码来代替,再把C线和X线之间的两个筹码"进位"到C线上.最后,我们来加M,即在M线上放入另一个筹码.所得结果如图 44 之右图所示,这个和可以读作 MMDCCCVI.这样,我们不需要使用草稿纸,也不必记忆加法表,只是通过一些

简单的机械操作, 便求出了这两个数之和。

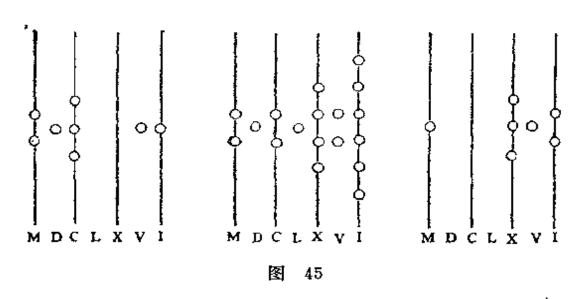
减法也是一样的,只不过不再向左边"进位",而是需要从左边"借位"。例如,我们考虑从

MMDCCCVI

中减去

MDCCLXIX

这个问题,把第一个数用筹码表示在算盘框图上,如图45之左图 所示,现在来减第二个数,从右到左进行,因为我们不能从VI中 减去IX,所以必须从左边"借位",即从C线上移去一个筹码,而 在L间隔处放入一个筹码、在X线上放入五个筹码来代替,然后



再从X线上移去一个筹码,而在V空格处放入一个筹码、在I线上放入五个筹码来代替.这时,算盘框图上筹码的情况如图45之中图所示.现在,我们就可以减去IX即VIIII,于是在V间隔处剩下一个筹码,在I线上剩下两个筹码.然后,相继减去一个X筹码,一个L筹码,两个C筹码、一个D筹码、一个M筹码.最后结果如图45之右图所示,这个所求之差可以读作MXXXVII.这样,我们没有使用草稿纸,也不必记忆任何算术运算表,只是进行一些简单的机械操作,便求出了这两个数之差.

采用印度--阿拉伯位值数字系统,依次记录算盘的各条线上

的筹码的数目,便十分简单地表示出一个数.符号 0 代表没有筹码的线.我们现在采用的加法和减法的算式,以及"进位"和"借位"的概念,或许就是从在算盘上完成这些运算的过程中产生的.因为当使用印度一阿拉伯数系进行运算时,我们用的是一些符号,而不是真正的筹码,所以我们必须记住一些简单的数字组合,或者依靠基本的加法表.

在中世纪的欧洲,提倡使用罗马数字和算盘进行计算的人,称为算盘家(abacists),而提倡使用印度一阿拉伯数字和适当的算法进行计算的人,称为算术家(algorists)。在从1100年到1500年的四百年间,在算盘家与算术家之间进行了长期的、有时是很激烈的争论.直到大约1500年,我们现在使用的计算法则才占了上风。在以后的一百年中,算盘家几乎被遗忘,到了十八世纪,算盘在西欧已经绝迹。由于法国几何学家 J. V. 彭色利(Poncelet)在拿破仑讨伐俄国的战争中作了俘虏,被释放后,把一个样品带回了法国,算盘才作为古董又在西欧重新出现。虽然现在世界上大多数地区已普遍使用印度一阿拉伯数系及其算法,但是东方的一些国家仍然使用算盘,例如中国的算盘(suanpan),日本的算盘(そろぼん),俄国的算盘(cuērы),以及某些阿拉伯国家的类似的计算器具。

从前,阿拉伯数字符号变化很大,直到印刷术发展以后,它们的形状才固定下来。英文中 zero(零)一词来自阿拉伯 文 sifr 的拉丁化形式 zephirium,而后者则是印度文 sunya 一词的翻译,意义为"无"或"空".阿拉伯文sifr在十三世纪由内莫拉里乌斯(Nemorarius)引入德国,即 cifra,由此又产生了英文 cipher 一词。

现在人们往往批评算盘家过于保守、惧怕改革,但是,算盘家感到阿拉伯数字不可靠也是很自然的,当时人们还不熟悉这些新的数字,而且在很长的时期内这些数字都没有标准化,数字 0 特别容易引起混淆,在能够正确使用这些新的符号以前,必须耐心地进行学习,然而,算盘家有一个更有力的、更能使人信服的

反对新数字的理由:这些数字本身很容易被篡改,我们很容易把0改成6或9,把1改成4、6、7或9,其他数字的形状也能够改动,而且在已经记录下的一些数字之间或者在它们的后面能够再添加一些数字,正因为如此,佛罗伦萨市参议会在1299年颁布法令,禁止在财政手续中随意使用阿拉伯数字。

在这一讲中,我们已经讨论了两项早期的重要发明——算盘和印度—阿拉伯数系,这两项发明大大有助于人们完成计算工作。但是二者的出现时期均未确定,印度—阿拉伯数系肯定出现在公元800年以前某个时候,面算盘则要比这早得多。但是,毫无疑问,这两项在历史上有联系的重要发明的出现,都是数学史上的里程碑。

虽然现在世界上大多数地区都已走上了算术家坚持的道路,但是美国、法国和其他一些国家的小学教师仍然认为在向学生们讲解印度一阿拉伯数系中的位值概念时,算盘是很有用的. (在我国的小学中一直在开设珠算课——译者注.)因为,正如前面已经说过的,加法中的"进位"和减法中的"借位"等概念,很可能是在用算盘进行这些运算时产生的.

习 顯

- 13.1 使用原始的算盘求下列两数的和与差: MDCCLXXXIX 和 MMDCLXXVIII.
- 13.2 印度—阿拉伯数系是以 10 为基的位值数系的 个例子,我们可以建立以任何整数b>1 为基的位值数系,当选定基 b 以后,我们必须采用b个基本符号来表示 0 , 1 , 2 , … , b-1 ;这些基本符号称为这个数系中的数字,如果 $b \le 10$,那么我们可以采用熟悉的印度—阿拉伯数字,如果b>10 ,那么我们可以除采用印度—阿拉伯数字以外再加上若干个其他符号。

试证明, 我们可以把任何(整数)N 唯一地表示为下列形式:

 $N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$, $\sharp + 0 \le a_i \le b$, $i = 0, 1, \dots, n$.

这时,我们可以按位值原则,以 b 为底,把上面的数N 表示为数字符号序列

$$a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$$
.

因此,这些数字符号中的任何一个,都表示基 b 的某个幂的系数,面究竟是哪一个幂,则取决于该数字符号出现的位置.例如,我们可以把 3012 看成是按位值原则,以 4 为基,用 数 字符号0,1,2,3表示的一个数.为了说明把这个数看成是以 4 为基来表示的,我们把它写成(3012),当不写下标时,就认为该数是以10为基(通常的基)来表示的.

- 13.3 (a) 试构造以7为基的加法表和乘法表.
- (b) 试把(3406),与(251),相加,
- (c) 试把(3406),与(251),相乘。
- 13.4 (a) 试构造以12为基的加法表和乘法表,用符号 t 和 e 表示数字10和11.
 - (b) 试把(3t04e)2与(51tt)2相加.
 - (c) 试把(3t04e)12与(51tt)12相乘.
 - 13.5 (a) 试以 8 为基来表示(3012)5.
- (b) 当以何数为基时, 3×3=10? 当以何数为基时, 3×3=11? 当以何数为基时, 3×3=12?
- (c) 当以某数为基时,27能够表示一个偶数吗?37能够吗? 当以某数为基时,72能够表示一个奇数吗?82能够吗?
 - (d) 试求b, 使得79=(142),.
 - (e) 试求b, 使得72=(2200)。
- 13.6 (a) 一个以7为基的三位数,当改为以9为基时,其各位数字正好颠倒,试求这三个数字。
 - (b) 试求使得 301 表示一个平方数的最小基数,
 - (c) 设b>2, 试证明(121)₅是一个平方数.

- (d) 设b>4, 试证明(40001),可被(221),整除.
- 13.7 以 2 为基的位值数系(称为二进制)在数学中有着广泛的应用,而且,有许多数学游戏和难题也要利用这种数系来解决,下面举出这类问题中比较容易解决的两个,
- (a) 试说明: 在一个简单的等臂天平上,如何用一组1磅, 2磅,2²磅,2³磅,这样下去的砝码(每种只有一个)称重整数磅的 重量W.
- (b) 在如图46所示的四张卡片上,包括从1到15的所有数. 当换成二进制时,在第一张卡片上的所有数,最后一个数字均为1; 在第二张卡片上的所有数,倒数第二个数字均为1;在第三张卡 片上的所有数,倒数第三个数字均为1;在第四张卡片上,倒数 第四个数字均为1.现在只要你告诉我,你所认定的那个数 N(1≤

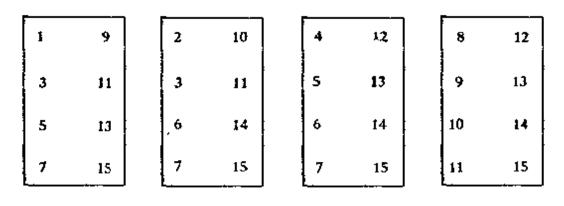
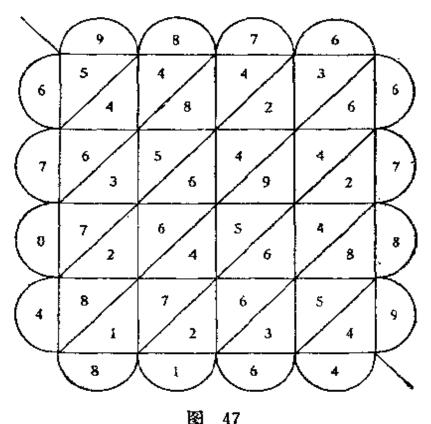


图 46

 $N \leq 15$),在哪几张卡片上能找到,我们就能猜出你所认定的那个数 $N \leq 15$),在哪几张卡片上能找到,我们就能猜出你所认定的那个数 $N \leq 15$),有实上,只要把出现那个数的卡片左上角的数 加起来,就能容易地指出该数 $N \leq 15$ 为了查出从 1 到63中的任何数,可以类似地做六张卡片。如果这些数依照已讲过的方法写在左上角标有1,2,4……的卡片上,则N这个数就能通过这种形式的卡片自动地表示出来。

13.8 许多简单的数字游戏,要我们"猜一个选定的数",这 已经依靠我们自己的位值得到解释.下列的就是这种游戏,试说 明之.

- (a) 要求某人考虑一个二位数,让他把十位数乘以 5,加上 7,再乘以2,再加上原数的个位数,告诉你最后的结果,你可由 这个结果暗中减去14,便得到原来的数.
- (b) 要求某人考虑一个三位数,让他把百位数乘以2,加上3,乘以5,加上7,再加上十位数,乘以2,加上3,再乘以5,再加上个位数,告诉你最后的结果,你可由这个结果暗中减去235,便得到原来的数.
- (c) 要求某人考虑一个三位数,百位数与个位数不同.让他把这个数的三位数字颠倒顺序,得到另一个数,求出这两个数的差(较大的减去较小的).只须告诉你这个差的最后一位数字,你便可以算出这个差.试问为什么?
- 13.9 在十五世纪和十六世纪的算术书中,介绍了一些基本运算的算法.在为进行长乘而设计的许多算法中,有一种或许是应用最广的方法,即所谓格栅法(gelosia method).在图47中,以9876与6789相乘而得到67048164为例,说明了这种方法.也许是



在印度最先有的,因为在婆什迦罗 (Bhāskara, 1114—约1185) 的《丽罗娃提》(Lilāvati)一书的评注以及在其他印度著作中已经出现。以后,从印度传到了中国、阿拉伯和波斯。阿拉伯人在很长的时期内偏爱这种方法,从阿拉伯人又传给了西欧人。这种方法看起来很简单,但是需要印(甚至需要用手画)网线,要不是由于存在这个困难,也许这个方法目前还在应用。这种方法的格式很象某些窗于上的格栅,因而得名。

试用格栅法求80,342与7,318之积.

- 13.10 1600 年以前最常用的长除算法是所 谓 帆 船(galley) 法,或勾划(scratch)法,它很可能起源于印度.现以37除9413为例来说明这种方法。
- 1. 把除数37写在被除数下面, 依通常的 9413] 2 方法得商数的第一个数字 2, 并把它写在被除 37 数的右边,
- 3. 向右移一位,在对角线方向上写除数37. 第二步留下的被除数是2013,得商数的第二个数字5. 考虑5×3=15,20-15=5.勾划掉3,2,0,并在0的上面写5. 考虑: 5×7=35,51-35=16. 勾划掉7,5,1,并在5的上面写1,在1的上面写6.
- 4. 向右移一位,在对角线方向上写除数37. 第三步留下的被除数是163,得商数的下一个数字4. 考虑: 4×3=12,16-12=4. 勾划掉3,1,6,并在6的上面写4. 考虑4×7=28,43-28=15,勾划掉7,4,3,并在4的上面

! ያኔ

306

377

3

Q413 1 25

写1,在3的上面写5.

5. 商数是254,余数是15.

这种方法最初应用很广,因为那时使用沙盘,很容易清除旧字,写上新字.后来使用纸和墨水,旧字不容易清除,只能打上一条线,面把新字写在上面,因而,这种方法被称为勾划法.又因为完成的算式很象一只帆船,所以也称为帆船法.

试用勾划法将 65,284 除以 594. (这一问题及其解答出现 在 《特雷维索算术》(Treviso Arithmetic, 1478)一书中,

参考文献

HILL. G. F., The Development of Arabic Numerals in Europe. New York: Oxford University Press, 1915.

KARPINSKI LOUIS CHARLES. The History of Arithmetic. New York: Russell & Russell, 1965.

PULLAN, J. M., The History of the Abacus. New York: Praeger, 1968.

第 14 讲

霍拉桑的诗人数学家

在十一世纪后半期,有三个青年学生一起就学于霍拉桑的最伟大的学者之一一一伊马姆·莫阿法克(Imam Mowaffak)。这三个青年学生是尼扎姆(Nizam ul Mulk)、哈桑(Hassan Ben Sabbah)和奥马尔·海牙姆(Omar Khayyam),他们成为亲密的朋友。因为据信莫阿法克的一个学生将会交好运,所以有一天在哈桑的提议下,三个同学发誓。他们当中不论是谁交好运,都必须与大家共享荣华。一些年过去了,事实证明尼扎姆是幸运者,他当上了苏尔坦(Sultan Alp Arslan)国王的首相。这时,他的同窗好友前

来求见,要求他履行当年的誓言.

哈桑想要做官,在首相的荐举之下,苏尔坦任命他为政府的要员.但是,哈桑自私自利、忘恩负义,终于不受欢迎,被赶走了.奥马尔既不想做官,也不想发财,他仅仅请求得到首相的庇护,允许他住下来倡导科学和数学,他祈望他的朋友幸福长寿.在老同学的谦虚、真诚感动之下,首相答应给予奥马尔一年一度的生活津贴.

哈桑几经周折,最后成了一群暴徒的首领.他们于1090年占据了里海南岸山区的阿拉穆特城堡,以此为基地劫掠过往的客商.哈桑及其同伙给穆斯林世界造成了极大的恐怖.哈桑被人们称为"山大王".由此使我们想到,英文中"assassin"(凶手)一词或许就是来自这个盗首的名字"Hasan".在他的无数受害者当中,就有他的老同学尼扎姆.

哈桑度过了动荡的、胡作非为的一生,与此相反,奥马尔的生活是平静的、积极向上的,他对当时的文化科学做出了重大贡献。

正是这样,在这三个学生当中,一个成了达官显贵和施主,一个成了负义者和杀人凶手,一个成了学者和创作家,在这一讲中,我们就来介绍这位学者在数学方面的重大成就,他的数学成就堪称数学史上的一个里程碑,我们先来叙述一些预备知识.

所谓一个未知数 x 的实多项式方程,是指下列形式的方程: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$.

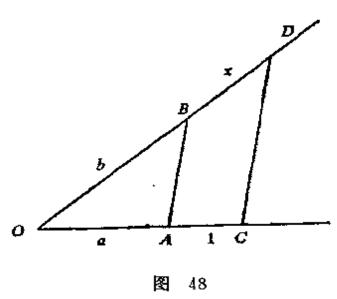
其中n是正整数, a_0 , a_1 , …, a_n 是实数,且 $a_0 \neq 0$. 满足这个方程的x的值,称为这个方程的根。早期代数学的主要任务之一,就是设法找到求这种方程的极的一般方法,这称为解方程。因为那时人们所知道的数只有正实数,所以在几百年当中,所谓解方程指的就是求方程的正实根。根据n=1, 2, 3, 4, 5, …, 方程称为一次的、二次的、三次的、四次的、五次的、…

对于一次方程不存在任何困难,不论是用几何方法还是用代

数方法都很容易求解.如果一个未知数的一次多项式方程具有正根,那么这个方程总可以写成下列形式:

$$ax=b$$
,

其中a和b都是正数.在代数上,由此可得x=b/a.在几何上,x是与长度为a,b,1的三个线段成比例的第四项,即 a:b=1:x. 因此,x可以根据图48所示简单的作图法而求得(实际上只用直尺和



圆规),其中COD 是任意一个角,OA=a,OB=b, AC=1, 而CD是过C所作的AB的平行线。

有趣的是,古代埃及人运用后来欧洲人称为试位法的方法来解一次方程,例如,为了解方程,

x + x/7 = 24

先给x选定一个方便的值, 譬如说x=7. 于是, x+x/7=8, 而不是 24. 因为 8 必须乘以3才是24, 所以x的正确值一定是 7 乘以3, 即21.

虽然解二次方程要比解一次方程复杂一些,但是早期的数学家既用几何方法又用代数方法解出了二次方程。二次方程的代数解法,不论是配方法还是代人求根公式的方法,现在已为任何学过初中代数的人所熟知。大约公元前2000年的古代巴比伦人已经知道与上述两种代数方法等价的一些方法。在第8讲的习圆8.10中,读者可以看到希腊人给出的二次方程几何解法的梗概。

三次方程的求解则要困难得多,虽然古代巴比伦人借助于由n的值求 n³+n² 的值的数表,解出了某些特殊的三次方程,而且我们在由评注家欧托修斯(Eutocius)保存下来的古代文献的片 断 中

可以看到,阿基米德曾经讨论过三次方程具有正实根的条件,但是,三次方程的一般代数解法直到十六世纪才由意大利的数学家们所得到.然而,在大约五百年以前,即十一世纪,波斯的诗人兼数学家奥马尔·海牙姆就已得出三次方程的几何解法,这就是上面提到过的那个数学史上的里程碑.现在,我们先介绍一些历史背景,然后讨论海牙姆的方法.

从五世纪中叶罗马帝国陷落到十一世纪,称为欧洲的黑暗时代,因为在这一时期,西欧的学术和文化处于低潮.然而,在同一时期,阿拉伯帝国崛起了.在穆罕默德于公元 623 年从麦加逃到麦迪纳之后的一年中,阿拉伯半岛上分散的、不统一的部落,以一种强烈的宗教热情联合成一个强大的国家.一百年内,在伊斯兰的绿色和金色旗帜下的武装力量把穆斯林星和月(为伊斯兰教的象征.——译者注)的统治和影响,扩展到从印度起经过波斯、美索不达米亚和北非直至西班牙的领土.

阿拉伯人吸收和掌握希腊和印度的学术成就,对于保存大量 世界文化作出了重大贡献.许许多多的希腊和印度的天文学、医 学、数学著作被译成阿拉伯文保存下来,后来欧洲的学者才有可 能把它们重新译成拉丁文或其他文字.如果没有阿拉伯学者的辛 勤劳动,大量的希腊和印度的科学成就在漫长的黑暗时代必定会 完全丧失而无可挽回.阿拉伯人除了令人敬佩地保存了许多世界 文化遗产以外,还作出了自己的贡献,其中最有创造性的一项就 是海牙姆关于三次方程几何解法的工作.

奥马尔·海牙姆(约1044—约1123)是一位波斯的诗人、天文学家和数学家,他生于霍拉桑的纳沙普尔(位于伊朗东北部),并在当地受教育。他作为著名的《鲁拜集》"(The Rubaiyat)一书的作者闻名于西方世界,他也为科学界所熟知,这是因为:他曾经编制精确的历法,并对欧几里得的平行公设提出批判,——这可

¹⁾ 此书由郭沫若译成中文. ——译者注

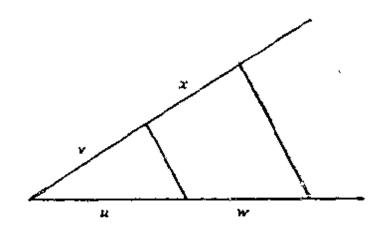
以说是非欧几何产生的前兆,特别是,他对阿拉伯代数学作出了 创造性的贡献,其中包括用几何方法解各种类型的三次方程,求 出这些方程的正实根.

现在,让我们通过解下列特殊类型的三次方程来说明海牙姆的方法,

$$x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$$
,

其中a, b, c, x看成是一些线段的长度.海牙姆把这种类型的三次方程叙述为:"一个立方体、一些边和一些数,等于一些正方形."求解这个三次方程的问题,在几何上可以叙述为:给定一个单位线段和三个线段a, b, c, 作线段x, 使得上面的关于a, b, c, x的关系式成立.目标是尽可能只使用直尺和圆规作出线段x. 只使用直尺和圆规来求解,一般说来,是不可能的,而在作图过程中的某一步,必须允许画某一特定的圆锥曲线.

在解这个三次方程时多次采用的一个基本作图是: 求与三个已知线段成比例的第四线段. 这是一个古老的问题, 其解法古希腊人就已经知道. 假设u, v, w 是三个已知的线段, 试求线段x, 使得u:v=w:x. 图49与图48类似, 它说明我们可以怎样使用直尺和圆规来作出所求的线段x.



E 49

现在, 我们按照海牙姆的几何方法来解三次方程

$$x^3 + b^2x^2 + a^3 = cx^2$$
.

首先,根据基本作图,求出线段 z,使得 b: a=a: z. 然后,再根据基本作图,求出线段m,使得b: z=a: m. 我们不难推出 $m=a^3/b^3$. 现在,在图50上,作 $AB=m=a^3b^2$. BC=c. 在AC上,以AC为直径作半圆,过B作AC的垂线与半圆相交于D. 在BD上截BE=b,

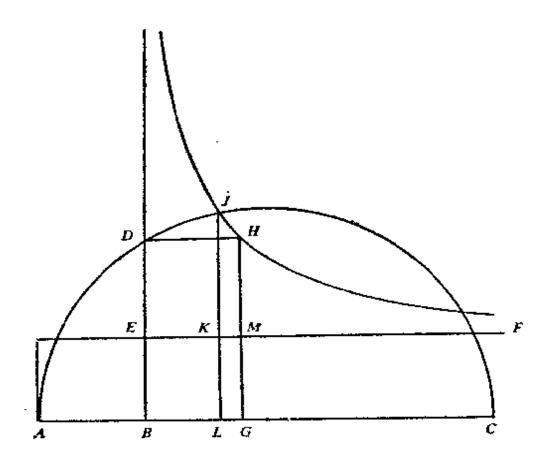


图 50

过E作AC的平行线EF. 根据基本作图,在BC上求得点G,使得ED: BE = AB: BG,作长方形DBGH. 过点H作等轴双曲线,使得EF和ED为其渐近线(即通过点H的一条双曲线,当以EF和ED为坐标轴时,其方程的形式为 xy =常数). 设这条双曲线与半圆相交于J,过J作DE的平行线与EF相交于K,与BC相交于L. 设GH与EF相交于M. 这时:

1. 因为J和H都在双曲线上,所以 (EK)(KJ) = (EM)(MH).

- 2. 因为ED: BE = AB: BG, 所以我们有 (BG)(ED) = (BE)(AB).
- 3. 因此,由1和2可知,

$$(EK)(KJ) = (EM)(MH) = (BG)(ED) = (BE)(AB).$$

4. 于是,

$$(BL)(LJ) = (EK)(BE + KJ) = (EK)(BE) + (EK)(KJ)$$

= $(EK)(BE) + (AB)(BE)(BE)$ (由 3)
= $(BE)(EK + AB) = (BE)(AL)$,

因此,

$$(BL)^{2}(LJ)^{2}=(BE)^{2}(AL)^{2}.$$

5. 但是,由初等几何可知,

$$(LJ)^2 = (AL)(LC).$$

6. 因此,由 4 和 5,有 $(BE)^2(AL) = (BL)^2(LC)$,

即

$$(BE)^{2}(BL+AB)=(BL)^{2}(BC-BL).$$

- 7. 在 6 中令BE=b, $AB=a^3/b^2$, BC=c, 我们得到 $b^2(BL+a^3/b^2)=(BL)^2(c-BL)$
- 8. 将 7 中最后一个式子展开,整理后得到 $(BL)^3+b^2(BL)+a^3=c(BL)^2$,

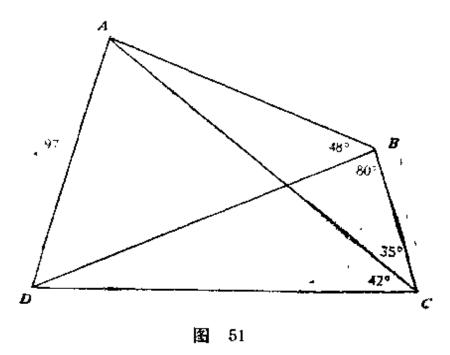
由此可知, BL=x为给定三次方程的一个根.

我们不得不承认海牙姆的方法是很巧妙的,高中教师如果把这种方法介绍给他的某些学生,那么必定会引起他们的兴趣.逐点画出所需的双曲线(利用基本作图)也是很容易的,因为如果 N 是 E F 上的任何点,过 N 引 E F 的 垂线交该双曲线 于点 P,则(E M)(M H)=(E N)(N P),因此 E N:E M=M H:N P,而 N P 是 与 三个已知线段 E N,E M,M H 成比例的第四个线段.用这种方法,可以画出双曲线上的一些点,过这些点作一条光滑曲线,便得到所需要的双曲线.可以让学生考虑数值系数的三次方程 x³+2x+8

 $=5x^2$. 这里a=2, $b=\sqrt{2}$, c=5. 这个方程的三个根是 2, 4, -1. 学生可能会用海牙姆的方法求出两个正根; 或者他还能把这个方法稍加推广而求出负根. 这是一个很好的"初等"研究课题.

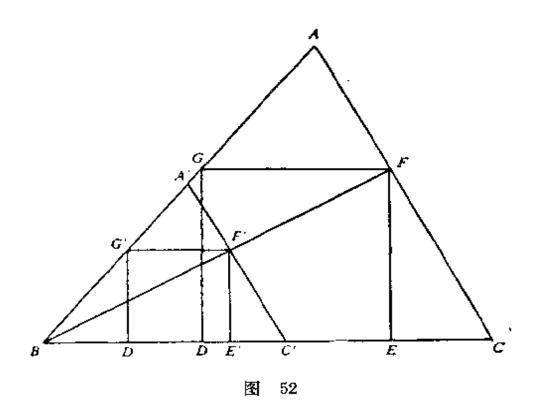
习 题

- 14.1 试用试位法求解兰德纸草书(约公元前1650)中的下述问题:"一个数,它的2/3,它的1/2,它的1/7,加在一起等于33.试问这个数是什么?"
- 14.2 试求图51中所画四边形的一边 BC 的长度,采用试位 法,取BC为适当长度,譬如说单位长度,在此基础上,根据正弦 定理算出BA和BD,然后根据余弦定理算出AD,等等.(这是一



个很有实用价值的方法,测量员可以采用.

14.3 在研究几何作图时,有一个相应于试位法的方法,称为相似法.这个方法的思路是:先作一个与所求图形相似的图形,然后按比例缩放到适当的大小.例如,假设我们想要在给定的三角形 ABC 中画一个内接正方形,使得它的一个边处于三角形的底边上,而对边的两个顶点分别处于另外两边上(见图52).首先



作大小适当的正方形 D'E'F'G',如图所示·如果点 F'正好 落在AC上,那么问题就解决了·否则,我们只是在与三角形 ABC相似的三角形 A'BC' 中作出了相应的正方形,点 B为相似中心·由此可知,直线 BF'与 AC 的交点 F,就是所求的内接于三角形 ABC 的正方形的一个顶点·

用相似法作线段DE,使D在已知三角形ABC的AB边上,E在AC边上,且BD=DE=EC.

14.4 (a) 古代巴比伦人解决的一个问题是:如果一个正方形的面积减去它的边长等于870,试求这个正方形的边长.这个问题解法如下所述:"取1的二分之一,得1/2;1/2乘以1/2,得1/4;870加1/4,得8701/4.这个数等于291/2的平方.291/2加1/2,得到30,这个结果就是正方形的边长."试证明:巴比伦人的这个解法,正好等价于解二次方程

$$x^2 - px = q$$

的公式代人法:

$$x = \sqrt{(p/2)^2 + q} + p/2$$
.

(b) 巴比伦人解决的另一个问题是: 解二次方程

$$11x^2 + 7x = 6^1/4$$

首先把各项乘以11,得到

$$(11x)^2 + 7(11)x = 68^3/4$$

令9=11x,则化为下列"标准形式"。

$$y^2 + py = q.$$

把具体数值代入公式

$$y = \sqrt{(p/2)^2 + q} - p/2$$

最后得到

$$x = y/11$$
.

试证明: 任何二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0$$

都能通过类似的变换, 化为下列标准形式之一:

$$y^2 + py = q$$
, $y^2 = py + q$, $y^2 + q = py$,

其中 p 和 q 都是非负数. 就我们所知,求解这种三项二次方程, 已超出古希腊人的能力范围.

- 14.5 (a) 在已发现的一块古巴比伦泥版书上,给出了当n取从1到30时 n^3+n^2 的值。试作对应于n=1, 2, …, 10的 n^3+n^2 的数表。
 - (b) 利用上面所作的数表, 求三次方程

$$x^3 + 2x^2 - 3136 = 0$$

的根.

(c) 在公元前大约1800年,巴比伦人提出一个问题: 求方程组

$$xyz + xy = 7/6$$
, $y = 2x/3$, $z = 12x$

之解, 试利用上面所作的数表, 求解这个方程组,

(d) O·诺伊格包尔(Neugebauer, 1899)相信, 古代巴比伦人 已经完全能够把一般的三次方程简化为"标准形式""对+ y²=0, 虽 然还没有证据说明他们真正做到这一点。试说明这个简化过程是 怎样进行的。

- 14.6 已知长度为a, b, c的三个线段,试用直尺和圆规作一线段,使其长度等于 $m=a^3/bc$.
 - 14.7 (a) 试应用海牙姆的几何方法求三次方程 $x^3+2x+8=5x^4$

的两个正根.

- (b) 试将海牙姆的方法稍加推广,求这个方程的负根,
- 14.8 (a) 试证明,能够用几何方法求出不完全的三次方程 $ax^3+bx+c=0$

的实根,假设在笛卡儿直角坐标上已经画出曲线y=x³,那么只要 再画出直线ay+bx+c=0即可得到所求的根,

(b) 试应用上述几何方法解三次方程

$$x^3 + 6x - 15 = 0$$
.

(c) 试应用几何方法解三次方程

$$4x^3 - 39x + 35 = 0$$
.

(d) 试证明: 任何完全的三次方程

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$
,

都能通过变换x=z-b/3, 化为不完全形式(以z为未知数).

(e) 试应用几何方法解三次方程

$$x^3 + 9x^2 + 20x + 12 = 0$$
.

有趣的是,用几何方法还能求出不完全的三次方程或完全的三次方程所具有的复虚根. 见A. Schultze, "Graphic Algebra"(图解代数学)一书(New York: Macmillan Company, 1922).

参考文献

COOLIDGE, J. L. The Mathematics of Great Amateurs. New York: Oxford University Press. 1949.

第 15 讲

大 智 若 愚

印度-阿拉伯数系传入西欧并得到推广,在很大程度上是由于出版了一些提倡新数字的著作。

我们所知的最早的阿拉伯算术书是花拉子 密(al—Khowâri-zmî,大约825年)所写的,随后又出现了许多其他阿拉伯学者的算术书。这些算术书的内容包括印度数字的计算法则,它们是按照印度模式写成的。它们还给出一种检查算术计算的方法——去九法,以及用非代数方法解决某些代数问题的法则——试位法和双试位法。另外,还阐述了平方根、立方根、分数和三项法等概念。

花拉子密曾写过一本有关应用印度数字的著作,它使一个词转变为常用的数学词汇.这本书的原版已经失传,但是在1857年发现一种拉丁文译本,开头是这样写的。"Algoritmi 曾说过,……"这里花拉子密的名字变成了Algoritmi,后来又演变为现在的algorithm(算法)一词,意思是某种特定算法的计算步骤.

有趣的是,另一个常用数学词汇algebra(代数)的产生也要归功于花拉子密.这个词来源于他的《代数学》(Hisâb al-jabr w'almuqâbalah)一书的书名,它可直译成《再结合和对等的科学》,或意译成《移项和消去的科学》¹⁾.这部书一直保存至今,它通过拉丁文译本传入欧洲,并使代数学(al-jabr 或 algebra)一词在很长时间里一直是方程学的同义词.

阿拉伯字 al-jabr 原来并没有数学意义, 它通过西班牙 的 摩尔人传到欧洲, 在那里algebrista 一词的意思是正骨者(使折断的

¹⁾ 合并出现在方程两边的同类项, 把方程一边的某一项改变符号移到方程的另一边, 这两种运算构成早期代数学的基本法则.

骨骼复原的人),当时的理发师常常自称为algebrista,因为在中世纪理发师兼营正骨和放血,我们今天所熟悉的理发店门口红白两色的旋转圆柱标志就是这种古老职业的反映。

让我们还是来考虑那些对传播印度-阿拉伯数系的知识并促进其应用起过重要作用的著作.其中影响最大的是1202年在意大利出版的《算盘书》(Liber abaci),它的出现是数学史上的一个里程碑.本讲所涉及的内容主要是这部著作.

《算盘书》一书的作者L·斐波那契 (Fibonacci, "Bonaccio之子 Leonardo", 1175—1250?)是中世纪数学技巧最娴熟的数学家,又称为比萨的莱昂纳多(Leonardo of Pisa 或Leonardo Pisano). 他出生在商业城市比萨,父亲在当地经商. 那时,意大利的许多大商行都在地中海地区开货栈,他父亲曾担任关税管理人,这使得莱昂纳多早年跟随父亲到了地处非洲北岸的布日伊. 父亲的职业早就引起了他对算术的兴趣,后来他访问了一些阿拉伯港口,游历了埃及、西西里、希腊和叙利亚等地,使他接触到了东方和阿拉伯的数学实践,也使他确信印度—阿拉伯计算方法具有优越性. 1202年,他回国后不久,就发表了著名的《算盘书》.

《算盘书》的第一版没有保存下来,现在我们见到的是1228年出版的第二版,它是讲算术和代数学的。虽然这部书基本上是独立研究的成果,但也受到花拉子密和阿布·卡密尔(Abû Kâmil)的代数学的影响。它充分阐述并极力提倡印度-阿拉伯记数 法及其计算方法。全书共十五章,内容包括解释新数字的读写方法,以及解一次和二次方程的试位法和代数方法。不过作者还没有认识到方程的负根和虚根,书中的代数学是文字叙述的。它的应用部分涉及到实物变换、合股关系、比例法和测量几何。书中还收集了大量问题,成为后来几个世纪中学者们的一座材料丰富的知识宝库。但是,这部著作的直接效果是促进了印度-阿拉伯数系的传播。

读者可以从本讲所附习题归纳出《算盘书》一书中某些问题的

性质. 这里只解释其中两个特别有趣的问题.

我们不难辨读和解释古代兰德纸草书(大约公元前1650年)中的大多数问题,但其中第79题最初却令人费解,它似乎可被简单地当作下面这样一组数据和所指的加法,

財 产	
身 子	7
猫	49
老 鼠	343
麦 蔼	2401
粮食(以赫支特 ¹⁾ 为单位)	16807
	19607

可以立即看出,这些数字是7的一至五次幂及其和.因此,最初的设想是,作者也许以房子、猫等象征性术语表示一次幂、二次幂,等等.

然而,1907年,当时著名的德国数学史学家M.康托尔(Canntor,1829—1920)对此题做出了似乎更合理、更有趣的解释.他从中发现了一个流行于中世纪的问题的起源,这个问题被收集在《算盘书》一书中:"在通往罗马的道路上有七个老妇人。每个人赶着七头骡子,每头骡子驮七只口袋,每只口袋装七条面包,每条面包配七把餐刀,每把餐刀有七层刀鞘.试问:在去罗马的路上,一共有多少老妇人、骡子、口袋、面包、餐刀和刀鞘?"对于这个问题,后来还有一个更为人们所熟悉的说法,这就是一首古代英国童谣:

我赴圣地爱弗西(Ives), 途遇一人携七妻, 每妻七袋手中提, 每袋七猫数整齐, 每猫七仔紧相依,

i) 赫克特为古代埃及的容量单位.---译者注

妻与布袋猫与仔, 几何同时赴圣地?'

根据康托尔的解释, 兰德纸草书中那个古老的问题就可以表述如下: "有一份财产包括七间房子,每间房子有七只猫,每只猫捉了七只老鼠,每只老鼠吃了七棵麦穗,每棵麦穗可以长出七赫克特粮食,试问这份财产共有多少房子、猫、老鼠、麦穗和粮食(以赫克特计)?"

这一道题可能是作为世界难题的一部分保存下来的. 当抄写人阿默士把它记录在兰德纸草书上时,它似乎就已经很古老了;而当斐波那契把它收编到《算盘书》中时,它已流传了近3000年. 大约800年后的今天,我们正在把它的另一种说法(上述童谣) 念给孩子们听. 一首童谣经历了如此奇特的曲折过程,尽管可能是由古代英语引起的,但由此我们不禁想到这道古埃及的难题是否也经历了类似的曲折过程.

我们今天的杂志上经常出现许多难题,其实相似的问题自古以来就有了,现在我们几乎难以确定其中一些问题到底已经存在 多久了,

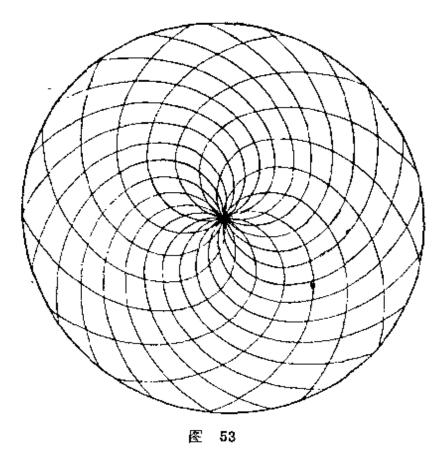
我们想要提及的第二个特别有趣的、也许是《算盘书》中最富成果的问题是:"如果每对兔子每月能繁殖一对子兔,而子兔在出生后第二个月就有生殖能力,试问一对兔子一年能繁殖多少对兔子?"不难证明,由这个问题可以得到下面有趣的数列(其中各项分别代表相继各月存在的兔子的对数):

1, 1, 2, 3, 5,, x, y, x+y,

它称为斐波那契数列,其中头两项是1,以后每项都是前面两项之和,出人意料的是,这个数列在许多场合都会出现,它可应用于分割难题(例如把一个正方形分割为若干不相等的正方形)、艺术、蜜蜂的繁殖和叶序等方面,使人惊讶的是,在数学的许多不同分支都能碰到它,

例如,我们考虑向日葵的花盘,从盘中心向外辐射出来的螺

旋线弧把花盘分割为含有花籽的菱形小块,如图53所示. 奇怪的是,如果数一下顺时针方向伸展的螺线,然后再数逆时针方向伸展的螺线,我们会发现两个数目是斐波那契数列的两个邻项. 事实上,任何菊科植物(如雏菊或翠菊)的花盘都有此特性.只不过因为向日葵的花籽和花盘较大,所以更容易得到验证. 附带提一句,更使人惊奇的是,上面提到的这些螺线的形状是对数螺线.



下面再考虑从某种植物主茎的侧面生长出来的叶子(或芽体、枝叉).如果我们在主茎底部附近选定一片叶子,然后沿主茎向上计数叶子,一直数到恰好在选定叶子正上方的一片为止,这个数通常是斐波那契数列中的一项.在我们沿主茎向上计数叶片的同时,还计数绕主茎旋转的圈数,也刚好数到刚才那片叶子为止,所得到的数通常是刚才那项前面的一项.在很多种类的植物中,都可看出相似的排列形式,例如莴苣头上的叶子,洋葱的层

次和松果的圆锥螺线等.

如果把斐波那契数列邻项之比作为数列的项,则我们得到

$$\frac{1}{1}$$
, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{13}$,

在数学上可以证明,这个数列趋向于一个极限值

$$r = (\sqrt{5} - 1)/2$$
.

这就是有名的黄金比,它在第五讲中已经讨论过,大自然似乎总是力求接近黄金比,

斐波那契数列在数学的各领域里有许多意想不到的应用。例如,在欧几里得算法"的计算过程中,为了求出两个给定正整数的最大公因数,需要进行一系列除法。我们自然想知道是否有可能予先确定除法次数的上限,G·拉梅(Lame, 1795—1870)对此提出下述巧妙的定理。为了求出两个正整数的最大公因数,所需进行的除法的次数决不大于较小整数的位数的五倍。这个定理的证明首先要用到斐波那契数列的某些性质。

斐波那契数列到处可见,有关斐波那契数列及其许多性质的 文献多得惊人并且在继续增加.各种有趣的关系,如同三角形的 几何性质一样,似乎是层出不穷的.实际上,1963 年在 V·霍加特(Hoggatt)博士的倡议下,一群热衷于研究斐波那契数 列的 人成立了斐波那契协会,并开始出版主要研究斐波那契数列和其他有关数列的杂志《斐波那契季刊》(Fibonacci Quarlerly).在创刊的头三年中,它发表了近1000页有关这一特殊领域的研究成果.1968年,为了解决大量稿件积压问题,出版了三期增刊.这一盛况一直持续不衰.

除了《算盘书》以外,斐波那契还写了另一些著作。例如1220年出版的《几何实习》,(Practica geometriae),这本书广泛收集了有关几何学和三角学的材料,处理巧妙,论述严密,具有独创性。大约在1225年,斐波那契写了《象限仪书》(Liber quadratorum),

¹⁾ 见第8讲习题8.4.

这是一部关于不定分析的出色而有新意的著作,它标志着斐波那 契在这个领域中是一位处于丢番图和费马(Fermat)之间的杰出的 数学家.这些著作使同时代的大多数学者望尘莫及.

斐波那契的数学天才受到西西里岛诺曼底公国有学识的国王 弗雷德里克 (Frederick) 二世的赏识,他被请进王宫参加数学比赛,国王的随从巴勒莫的约翰出了三道难题,他都一一解决了, 他的表演受到高度称赞。

第一道题是求一有理数x,使得 x^2+5 和 x^2-5 都是有理数的平方. 斐波那契给出的答案是 x=41/12. 因为 $(41/12)^2+5=(49/12)^2$, $(41/12)^2-5=(31/12)^2$,所以这个答案是正确的. 它后来被收在《象限仪书》一书中.

第二道题是求解三次方程

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$
.

斐波那契证明它的根不能用形式为 $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ 的无理量来表示,换句话说,不能用尺规作图法求出它的根、然后,他给出了根的近似值,用十进记数法表示为

1.3688081075,

精确到九位数字,这个答案后来记录在斐波那契写的另一部著作《繁花》(Flos)一书中,但没有附带任何解释,至于他是如何求出这个答案的,人们一直不得而知,

第三道题是最容易的,它也记录在《繁花》一书中:"三人共有一笔钱,每人各占 1/2,1/3,1/6.现在,每人从中取钱若 干直到取完为止.然后,第一人放回他所取的1/2,第二人放回1/3,第三人放回1/6.再将放回的钱平均分给三人,这时每人得到的钱恰好是他们应得的.问原来共有多少钱?每人从中取了多少钱?"斐波那契解此题的方法主要如下:设。表示原来共有的那笔钱,3x表示放回的钱.在每人得到放回的钱的1/3以前,三人已分别取钱(\$/2)-x,(\$/3)-x和(\$/6)-x.因为这也是在他们放回最初拿的1/2,1/3,1/6之后每人得到的钱,所以最初取钱分别为

2[(s/2)-x)], (3/2)[(s/3)-x], (6/5)[(s/6)-x]. 它们相加等于s. 于是有7s=47x. 这是一个不定方程. 斐波那契设s=47, x=7, 于是每人原来从那笔钱中分别取33, 13, 1.

斐波那契有时在其作品上署名Leonardo Bigollo. 现在看来,bigollo一语双关,它既可指"旅行者",又可指"愚蠢的人". 当初斐波那契署名时,也许意指他是一个伟大的旅行者,因为事实上也正是如此. 但是还有一种传说: 那些与他同时代的人认为他愚蠢(因为他对新的印度-阿拉伯数字特别感兴趣),因此他才特别喜欢这个签名,以此向那些批评家显示一个愚人所能取得的成就,——大智若愚!

ショラ 题

- 15.1 (a)试证明:一个自然数的各位数字之和被 9 除 所 得的余数与这个数本身被 9 除所得的余数相等。
- 一个给定的自然数除以整数 n 得到余数,这一运算称为 去 n 法.上述定理表明去九法特别简单易行,
- (b) 一个给定的自然数除以 9 所得的余数称为这个数的超出量. 试证明下述两个定理: (1)和的超出量等于加数的超出量之和的超出量, (2)二数之积的超出量等于二数的超出量之积的超出量,

这两个定理为用去九法检查加法和乘法运算提供了依据.

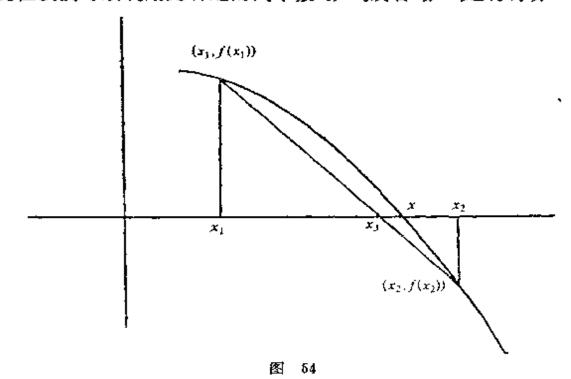
- (c) 试求478和993的和与积,并用去九法检查·
- 15.2 (a)试证明,如果任意改变一个自然数各位数字的顺序而形成一个新数,则新、老两数之差可以被9整除.

这为簿记员提供了核对账目的依据,如果在复式簿记里借方记录的总数和贷方记录的总数不平衡,且两者之差可以被9整除,那么错误很可能出在把一笔借款或贷款记入帐簿时交换了数字.

- (b) 试解释下面的数字游戏.要求某人想一个数,再交换数字顺序形成一个新数,从较大的数中减去较小的数,将其差乘以任意一个数,然后去掉乘积中任一非零数字,最后公布剩下的数字.做游戏的人通过计算所公布的数字的超出量,再从9中减去这个超出量,即可找出被去掉的数字.
- 15.3 求方程实根近似值的最古老的方法之一是所谓双试位法 (double false position). 它似乎起源于印度并被阿拉伯人所利用. 用现代方式可简述如下:设方程 f(x) = 0 的一个根为 x, 而 x_1 和 x_2 是两个接近于 x 并位于其两侧的数. 那么连接两点 $(x_1, f(x_1))$ 和 $(x_2, f(x_2))$ 的弦与 x 轴的交点 x_3 是所求根的近似值 (见图 54). 试证明:

$$x_3 = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)}.$$

现在我们可以利用更合适的两个数 x_1 , x_2 或者 x_3 , x_4 进行计算.



- 15.4 (a) 试利用双试位法求方程x3-36x+72=0的位于2和3之间的根, 计算到第三位小数.
 - (b) 试利用双试位法求方程x-tgx=0的位于4.4和4.5之间

的根, 计算到第三位小数,

- 15.5 试由《算盘书》中关于兔子繁殖的问题,求得斐波那契数列.
 - 15.6 设u"表示斐波那契数列中的第n项,试证明:
 - (a) $u_{n+1} \cdot u_{n+1} = u_n^2 + (-1)^n$, $n \ge 2$.
 - (b) $u_n = [(1+\sqrt{5})^n (1-\sqrt{5})^n]/2^n \sqrt{5}$.
 - (c) $\lim_{n \to \infty} (u_n/u_{n+1}) = (\sqrt{5} 1)/2$.
 - (d) $u_n = \pi u_{n+1}$ 是互素的.
- 15.7 求解下列《算盘书》中的两个问题,第一题是君士坦丁堡的一个权威人士向斐波那契提出的,第二道题是为了说明三项法而设计的,
- (a) 如果A拿走B的 7 个银币,则A的银币总数是B的 5 倍,如果B拿走A的 5 个银币,则B的总数是A的 7 倍.试问A和 B 各有多少银币?
- (b) 某国王派30人到果园种树,如果在9天内他们能种1000棵,那么36人种4400棵需要多少天?
- 15.8 求解下面《算盘书》中的问题,这是一个遗产问题,后来被N. 丘凯(Chuquet)和L. 欧拉(Euler) 收在他们的著作里,
- 一个人留给长子一个金币和所剩金币的七分之一,再从余下的金币中留给次子二个金币和所剩下的七分之一,然后从新的余数中留给三子三个金币和所剩下的七分之一,如此分下去,他给每个儿子的金币数总是比前一人多一个再加上所剩的七分之一,这样一直分到最后一个儿子获得全部余数,而且每个人得到的金币都相等,试问此人有多少儿子?有多少财产?
 - 15.9 试证明: 三个数

$$a^2-2ab-b^2$$
, a^2+b^2 , $a^2+2ab-b^2$

的平方构成算术级数. 如果 a=5, b=4, 则公差等于 720, 且第一个数的平方是 $41^2-720=31^2$, 第二个数的 平 方 是 $41^2+720=49^2$. 分别除以 12^2 , 我们就得到斐波那契对第一道比赛题 给 出的

答案. 如果用 1, 2, 3或 4代替此题中的 5, 则无解. 斐波那契曾证明, 如果x和h是整数且使得 x^2+h 和 x^2-h 是完全平方, 则h一定能被24整除. 例如, $5^2+24=7^2$, $5^2-24=1$, 以及 $10^2+96=14^2$, $10^2-96=2^2$.

15.10 求解下面斐波那契在《算盘书》中提出的问题.后来 它又以许多不同的形式出现,但实质上仍然是年金的概念.

某人通过七道门进人果园摘苹果,当他离开时,他把所摘苹果的一半多一个分给第一个门卫,再把所剩苹果的一半多一个分给第二个门卫,对其余五个门卫也这样做,最后离开果园时他还剩一个苹果,试问他在果园里一共摘了多少苹果?

参考文献

HOGGATT, V. E., Jr., Fibonaeci and Lucas Numbers. Boston: Houghton Mifflin, 1969.

SULLIVAN, J.W.N., The History of Mathematics in Europe from the Fall of Greek Science to the Rise of the Conception of Mathematical Rigour. New York: Oxford University Press, 1925.

第 16 讲

一个离奇的故事

在第十四讲中,我们已经看到波斯诗人兼数学家奥马尔·海牙姆是如何用几何方法求解三次方程的。在这一讲中,我们将会看到,大约五百年以后,意大利的数学家们终于设法用代数方法解出三次方程,接着又解出四次方程。这些成就构成数学史的一些精彩的片断,也可以认为是两个相继出现的数学 史上的里程碑。这个故事的情节离奇而生动,它的某些角色都是整个数学史

上的非凡人物.

简而言之,事实大体如下,大约在1515年,博洛尼亚大学数 学教授 S.del 费尔洛(Ferro, 1465—1526)用代数方法成功 地 解出 不含二次项的三次方程,即形如x3+mx=n的三次方程.他的工 作或许是在从前阿拉伯人的工作的基础上进行的。他没有公布这 个发现,但是把它秘传给他的学生A.M.菲奥尔(Fior),后来,大 约在1535年, N.丰塔纳 (Fontana, 1499—1557) 即塔尔塔 利 亚 (Tartaglia, 意为"口吃者",因幼年受伤造成发音困难,人们都这 样称呼他) 宣称, 他已经发现不含一次项 的 三 次 方 程 即 形 如 x¹+px²=q的三次方程的代数解法, 菲奥尔认为这不过是 虚 张声 势,因而向他提出挑战,要求进行一场公开的竞赛;在规定的时 间内,求解由两个竞赛者按照事先的安排而提出的一组三次方程 (二人所提方程个数相等), 塔尔塔利亚接受了挑战, 全力以赴进 行准备,在竞赛的前几天,他发现了不含二次项的三次方程的代 数解法,在参加竞赛时,塔尔塔利亚能够解两种类型的 三次方 程,而非奥尔只能解一种类型的方程,结果塔尔塔利亚获胜,后 来,一个不讲信义的天才人物---G·卡尔达诺(Cardano, 1501-1576、曾在米兰讲授数学兼行医)宣誓保守秘密,从塔 尔 塔利亚 那里骗取了三次方程解法的关键。1545年,卡尔达诺在德国的纽 伦堡出版了他的拉丁文的代数学巨著《大衔术》(Ars magna),其 中收入了塔尔塔利亚的三次方程的解法,作为一个解题法宝、塔 尔塔利亚抗议卡尔达诺背信弃义,但是他的控诉受到卡尔达诺的 一个最有才能的学生L·费尔拉里(Ferrari, 1522-1565)的反驳。 费尔拉里硬说卡尔达诺是通过第三者从S. del 费尔洛那里获得信 息的,并且指责塔尔塔利亚剽窃费尔洛的方法,结果引起了一场 激烈的争辩, 塔尔塔利亚从中逃得活命已经是十分幸运了.

关于这个故事的细节有一些不同的说法,这可能是由传说者 造成的,因为戏剧演员未必总是尊重事实,

卡尔达诺在《大衔术》一书中给出的三次方程 x3+mx=n 的代

数解法,实质上如下所述. 考虑恒等式

$$(a-b)^3+3ab(a-b)=a^3-b^3$$
.

如果我们选取a和b, 使得

$$3ab = m$$
, $a^3 - b^3 = n$,

则x等于a-b. 但是,由最后两个方程解出a和b,我们得到

$$a = t^{3} \sqrt{(n/2) + \sqrt{(n/2)^{2} + (m/3)^{3}}},$$

$$b = t^{3} \sqrt{-(n/2) + \sqrt{(n+2)^{2} + (m/3)^{3}}},$$

这时, x 由所谓卡尔达诺-塔尔塔利亚公式来确定,

$$x = \sqrt[3]{(n/2) + \sqrt{(n/2)^2 + (m/3)^3}} - \sqrt[3]{-(n/2) + \sqrt{(n/2)^2 + (m/3)^3}}.$$

因为通过变换x=z-b/3a,可以把一般的三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$

化为形如

$$z^3 + mz = n$$

的方程, 所以上述解法能够用来求解一切三次方程.

用代数方法解出一般的三次方程以后不久,人们就发现了一般的四次(或双二次)方程的代数解法。在1540年,意大利数学家 Z. de T. da科伊(Coi)向卡尔达诺提出下述问题:"试把 10 分成 三部分,使得这三部分构成连比,而且前两部分之积等于 6."如果用a, b, c来表示分成的三部分,那么我们就有

$$a+b+c=10$$
, $ac=b^2$, $ab=6$.

不难证明,从这三个方程消去a和c,便得到四次方程

$$b^4 + 6b^2 + 36 = 60b$$
.

卡尔达诺未能解出这个方程,但是他的学生费尔拉里解出了,并 且在求解这个方程时,他想出了求解任何形如

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

的四次方程的一种方法,而任何四次方程通过一个简单的线性变换都能化为达种形式,由上面这个四次方程,我们得到

$$x^4 + 2px^2 + p^2 = px^2 - qx - r + p^2$$

即

$$(x^2+p)^2=px^2-qx+p^2-r$$

因此,对于任意的3,有

$$(x^{2}+p+y)^{2} = px^{2}-qx+p^{2}-r+2y(x^{2}+p)+y^{2}$$

= $(p+2y)x^{2}-qx+(p^{2}-r+2py+y^{2})$.

现在,让我们选取 y,使得上面这个方程的右端为完全平方.为此,只须¹⁾

$$4(p+2y)(p^2-r+2py+y^2)-q^2=0.$$

但是,这是关于y的三次方程,所以可以用从前的方法 求 解. 利用这样一个y值,就把原来的问题化为开平方的问题了.

卡尔达诺把费尔拉里的四次方程解法写进他的《大衍术》一书 (1545),并以此为荣.

不久以后,又出现了另外一些求解一般的三次和四次方程的代数方法.在本讲的最后,我们将会看到十六世纪的数学家F. 韦达(Viete, 1540—1603)提出的方法(死后于1615年方才发表),以及R·笛卡儿(Descartes, 1596—1650)在1637年提出的求解四次方程的方法.但是现在,为了增加趣味,我们简单地介绍一下在这个关于三次方程代数解法的故事中的两位主要人物——卡尔达诺和塔尔塔利亚的生平事迹.

G·卡尔达诺是数学史上最奇特的人物之一,1501年生于帕维亚,是一个律师的私生子.他发展成一个极易冲动的人,最初以医生为职业,但是同时研究、讲授数学并撰写数学著作.他曾到苏格兰旅行,回来以后相继在帕维亚大学和博洛尼亚大学得到重要职务.他作为一个职业占星者,操弄算命天宫图,有一次曾以异端邪说罪下狱,原因是他竟敢公布了一个关于基督生平的天宫图.后来,他辞去博洛尼亚大学的职务,移居罗马,成为一个

⁽⁾ 使得二次式 $Ax^2 + Bx + C$ 为一个一次式的平方的必要和充分条件是 $4AC - B^2 = 0$.

著名的占星家, 说来也怪, 他过去曾因散布邪说而获罪, 后来却作为一个占星家而从罗马教廷领取养老金, 他于 1576 年死 在 罗马, 据说他是自杀的, 目的是为了证实从前他对自己的死期所做的占星预言是正确的, 许多传说都表明他禀性暴戾, 例如, 有一次在盛怒之下, 他割掉了他小儿子的两个耳朵, 原因是这个孩子吵闹得使他无法忍耐, 他到处树敌, 所以有一些传说可能是他所得罪的人故意夸张的结果, 因此, 他也许是被过分歪曲了, 当然, 他的自传是支持这种观点的,

卡尔达诺是当时兴趣广泛的天才人物之一,他撰写了关于算术、天文、物理、医学以及其他学科的许多著作。其中最重要的是《大衍术》一书,这是第一部用拉丁文写的著名的代数学专著。书中提到了方程的负根,还注意到复数的计算。此外,他还给出了求多项式方程实根近似值的一个粗糙方法,且有证据表明他已熟悉现在中学生在代数课中往往会遇到的"笛卡儿符号法则"。卡尔达诺还是一个老练的赌徒,他写过一本赌博指南,其中有不少有趣的概率问题。

塔尔塔利亚的蛮年是在艰难困苦中度过的.他大约于1499年生在布雷西亚,当法国人于1512年占领布雷西亚时他还是一个孩子.为了逃避法国人的残酷迫害,塔尔塔利亚和他的父亲(该城的一名邮差)同许多人一起躲进当地的大教堂.但是,法国士兵继续追捕,于是在这宗教的圣地发生了一场大屠杀.父亲被砍死,孩子的颅骨被砍伤,嘴巴上也挨了一马刀,颌骨和上腭开裂,但是总算没有死.后来,当孩于的母亲来到教堂寻找她的一家时,发现丈夫已经死去,儿子还活着.她设法把儿子带出来了,但是找不到医生治疗.这位母亲想到受伤的狗总是舔它的伤口,于是就为自己的儿子舔伤.塔尔塔利亚之所以能活下来,全靠这种最原始的治疗方法.但是由于上腭损伤,发音受阻,终生不愈,所以人们送给他一个绰号——"口吃者".当他十五岁时,他的母亲攒了一些钱送他上学,他充分利用了这仅有的一点机会,由偷来

的一本字帖逐步学会读书和写字·他买不起纸和笔,就躲在墓地里,利用墓碑练习书写·后来,他一生都在意大利各大城市讲授科学和数学,以此谋生·他于1557年死在威尼斯·

塔尔塔利亚是一位天才的数学家,除了发明三次方程的解法以外,还或许是他第一个把数学应用于火炮学,他撰写了一般认为是十六世纪最好的意大利文算术数科书,共两卷,全面论述了当时的数值运算方法和商业规范,他还出版了一些欧几里得和阿基米德著作的译本。

1572年,即卡尔达诺去世前的第四年,R·邦贝利(Bombelli, 约1526—1572) 出版了一本代数学,进一步提供了有关三次方程的知识。在一些关于方程论的教科书中,已经证明。当三次方程 $x^1 + mx = n$ 的三个根都是不等于零的实数时,表达式

$$(n/2)^2 + (m/3)^3$$

是负的. 但是,卡尔达诺-塔尔塔利亚公式把三次方程的实根表示为两个复数的立方根之差. 当时,人们对于复数还不大理解,通过复数来表示实根这种异常情况曾使当时的代数学家大为困惑. 邦贝利指出,(用现代术语来说),如果两个被开方式是共轭复数,则相应的两个立方根也是共轭复数,因此它们的和是一个实数. 但是,只要想用代数方法求出一个实数,使它等于卡尔达诺-塔尔塔利亚公式所表示的两个复数的立方根之差,那么就会得到原来需要求解的那个三次方程,只要方程的三个根都是不等于零的实数,就会陷入上述困境,所以把达种情形称为"不可约情形". 这里,我们虽然有一个三次方程实根的表达式,但是这个表达式的形式实际上是没有用的. 这种困难后来是用三角学的方法米克服的.

在第十二讲中已经指出, 邦贝利对于代数学符号的发展也有贡献.

后来的一些作者提出了另一些稍微不同的求解三次和四次方程的代数方法,例如,F·韦达提出求解三次方程

$$x^3 + 3ax = 2b$$

的下述巧妙方法(死后于1615年方才发表),任何三次方程都能化 为这种形式,设

$$x = \frac{a}{y} - y$$
,

这个方程变成

$$y^6 + 2by^3 = a^3$$

这是关于ゾ的二次方程,因此,可以求出ゾ,然后求出ソ,最后求 出x, 事达给出的四次方程的解法同费尔拉里的方法是类 似 的, 考虑"简化的"四次方程

$$x^4 + ax^2 + bx = c,$$

任何四次方程都能化为这种形式,也可以把它写成

$$x^4 = c - ax^2 - bx$$

两端同时加上x²y²+y¹/4,得到

$$\left(x^{2} + \frac{y^{2}}{2}\right)^{2} = (y^{2} - a)x^{2} - bx + \left(\frac{y^{4}}{4} + c\right).$$

现在,选取ッ,使得右端成为完全平方,其条件是

$$y^6 - ay^4 + 4cy^2 = 4ac + b^2$$

达是关于y²的三次方程,因此,可以求出y²,再开平方,这个问 题就完全解决了,

笛卡儿在1637年求解简化的四次方程

$$x^4 + bx^2 + cx + d = 0$$

时,用的是待定系数法. 设方程的左端等于乘积 $(x^2+kx+h)(x^2-kx+m)$.

$$(x^2+kx+h)(x^2-kx+m)$$
.

令所得等式两端对应项的系数相等,则得到关于 k, h, m的三个 等式,从这三个等式消去h和m,便得到关于k的一个六次方程, 也可以把它看成关于是的三次方程,于是,求解原来的四次方程 化为求解这个三次方程,

因为求解一般的四次方程可以化为求解相应的三次方程,所

以欧拉大约在1750年,试图用类似的方法,把求解一般的五次方程化为求解相应的四次方程。但是他失败了,大约在三十年后,拉格朗日也失败了。意大利医生P·鲁菲尼 (Ruffini 1765—1822)在1803,1805和1813年,对于现在熟知的下述事实给出了一个不大确切的证明。一般的五次或更高次代数方程的根,不能通过方程的系数用根式来表示。后来,在1824年,著名的挪威数学家N·H·阿贝尔 (Abel, 1802—1829)独立地证明了这个重要事实。E·伽罗瓦 (Galois, 1811—1832,死于手枪决斗,当时年仅21岁)以科学遗嘱的形式留下了一封信,在信中对用根式解代数方程的可能性做了明确的判断。但是,这一切属于一个更近代的数学史上的里程碑。

习 题

16.1 (a) 试证明:变换 $x=z-a_1/na_0$ 把n次方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$

化为关于z的一个不含n-1次项的方程。

(b) 根据(a), 通过变换x=z-b/3a把一般的三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$

化为形如

$$z^3 + 3Hz + G = 0$$

的方程. 试通过a,b,c,d求出H和G.

16.2 试具体完成卡尔达诺和塔尔塔利亚给出的求解三次方程

$$x^3 + mx = n$$

的解法的各步,

- 16.3 试利用卡尔达诺-塔尔塔利亚公式 解方程 x³+63x=316, 录出一个根,
 - 16.4 试证明, 1540年de科伊提出的问题导致四次方程

$$x^4 + 6x^2 + 38 = 60x$$
.

- 16.5 试应用费尔拉里方法,求出对应于习题16.4中的四次方程的三次方程。
- 16.6 作为三次方程不可约情形的一个例于,试应用卡尔达诺--塔尔塔利亚公式解方程

$$x^3 - 63x = 162$$
.

然后,证明

$$(-3+2\sqrt{-3})^3 = 81+30\sqrt{-3}$$
 和
 $(-3-2\sqrt{-3})^3 = 81-30\sqrt{-3}$.

因此,卡尔达诺-塔尔塔利亚公式给出的根实际上是-6.

16.7 卡尔达诺在解特殊的四次方程

$$13x^2 = x^4 + 2x^3 + 2x + 1$$

时,在方程的两端分别加上 3x². 试 这样做,并 解出这个方程的四个根.

- 16.8 试应用韦达方法解方程 $x^3 + 63x = 316$.
- 16.9 试应用韦达方法,求出对应于四次方程

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$$

的三次方程.

16.10 (a) 试具体完成笛卡儿在1637年给出的求解简化的四次方程

$$x^4 + bx^2 + cx + d = 0$$

的方法中的细节.

(b) 试应用笛卡儿的方法,求出对应于四次方程

$$x^4 - 2x^2 + 8x - 3 = 0$$

的三次方程,已知这个对应的三次方程的一个根是 4 , 试求四次方程的四个根,

参考文献

CARDAN, JEROMN, The Book of My Life, tr.by Jean Stoner, New York: Dever, 1963.

ORE, OYSTEIN, Cardano, the Gambling Schotar. Princeton, N.J.:Princeton University Press, 1953.

SULLIVAN, J. W. N., The History of Mathematics in Europe from the Fall of Greek Science to the Rise of the Conception of Mathematical Rigour. New York: Oxford University Press, 1925.

第 17 讲

使天文学家的寿命增加一倍

1614年,居住在爱丁堡的一位苏格兰贵族公布了他所做出的一项重要发明的详情,这个消息很快传开了。第二年,经过一些通信联系以后,一位数学教授乘坐马车从伦敦出发,不辞劳苦,奔向爱丁堡,去会见这位他无比崇敬的天才的苏格兰人。在漫长而又崎岖的旅途上,数学教授在日记中写道:这个苏格兰人的前额一定很高,因为他头脑发达,否则是难以做出如此惊人的发明的。由于意外的事故,教授在路上延误了时间,正在爱丁堡焦急等待的苏格兰贵族终于失望了,他向一位朋友抱怨说。"咳!教授不会来丁。"可是就在这时,有人敲门了,教授出现在他的面前。他们在沉默中相互凝视了达一刻钟之久。后来,教授说道:"阁下,我经历了长途跋涉专程来看望你,就是想要知道究竟是怎样富有聪明才智的头脑,才使得你首先想出对于天文学的这一极好的帮助。阁下,你发现了它,现在看来是很容易的,但是我很奇怪,在此之前为什么没有人能够发现它呢?"这位教授作为贵宾在

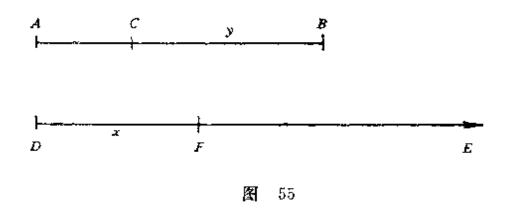
贵族的城堡里滞留了一个月之久。

这位苏格兰贵族就是梅尔契斯顿堡的耐普尔(Napier, 1550—1617), 去访问他的数学家就是伦敦格雷舍姆学院的几何学 教授 H·布里格斯 (Briggs, 1561—1631), 那项重要的发明就是对数——节省大量人力的计算方法之一,它无疑是数学史上的一个里程碑.

现在,学过高中数学的学生都知道,对数作为一种计算方法的功能就在于,通过对数,可以把乘除运算化为比较简单的加减运算,这种化简的原始思想,在三角公式

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos (A - B) - \cos (A + B)]$$

中已见端倪,而这个公式在耐普尔时代已为人们所熟知,耐普尔的 思路很可能就是从这个公式出发的,因为否则很难解释为什么最 初他仅限于研究角的正弦的对数.耐普尔潜心研究他的理论二十 余年,他的思想基础,即他最终给出的对数的定义,如下所述. 考虑一个线段AB和一条射线DE,如图55所示.设点C和点F以



同样的初始速度分别从A和D出发,沿线段AB和射线 DE 运动。假设点C运动的速度在数值上总是等于距离CB,点F运动的速度是不变的。这时,耐普尔把DF定义为CB的对数。也就是说,设DF=x, CB=y, 则

$$X = \text{Nap log y.}$$

为了避免分数的麻烦,耐普尔取AB的长度为 10°, 因为当时最好的正弦表有七位数字。从耐普尔的定义,以及耐普尔还不可能有的知识,可以导出¹

Nap
$$\log y - 10^7 \log^3/\epsilon (y/10^7)$$
,

因此,通常说耐普尔对数是自然对数(即以 e 为底的对数),这实际上是不正确的。我们注意到,耐普尔对数随着真数的增加而减小,与在自然对数中发生的情况正好相反。

耐普尔于1614年在一本题为《奇妙的对数定理说明书》的小册子中,发表了他关于对数的讨论,并给出了以弧分为间隔的角的正弦的耐普尔对数表.这部著作立即引起人们广泛的

兴趣. 当布里格斯于1615年访问耐普尔时,两人一致认为:如果把对数改变一下,使得1的对数为0,10的对数为10的一个适当次幂,编造出来的对数表就会更有用. 于是,也就有了今天在高中数学课里讲授的所谓布里格斯对数,即常用对数. 这种对数实质上是以10为底的对数,在数值计算上具有很大的优越性,因为我们的数系是以10为基数的. 对于以其他数 b 为基数的数系,为了计算方便,自然也该编造以数b为底的对数表²⁾.

点
$$C$$
 的速度 = $-dy/dt = y$.

即dy/y = dt, 积分后, 得到 lny = -t + C, 代入t = 0, 计算积分常数, 得到 $C = ln \ 10^7$, 因此 $lny = -t + ln \ 10^7$.

现在

点
$$F$$
 的速度 = $dx/dt = 10^7$,

因此 $x = 10^7 t$, 所以

Nap log
$$y = x = 10^7 t = 10^7 (\ln 10^7 - \ln y)$$

= $10^7 \ln (10^7/y) = 10^7 \log_{1/6} (y/10^7)$.

2) 为了进行理论分析,对数的底最好这样来选取,即使得对数函数的导数具有 尽可能简单的形式,在微积分教科书中已经证明,如果y=logax,则

$$dy/dx = (1/x) \log_b e$$
.

如果选取 b=e,则这个导致具有最简单的形式,即

$$dy/dx = 1/x$$
.

以e为底的对数称为自然对数,一般采用特殊的符号 $\ln x$ 来表示以e为底的对数 $\log x$ 。

¹⁾ 这个结果,借助于一点微积分的知识,便很容易证明。因为,我 们 有 $AC = 10^7 - y$,因而

布里格斯访问耐普尔以后返回伦敦,以其全部精力编制常用对数表,并于1624年出版了他的《对数算术》(Arithmetica logarithmica)一书,其中包括从1到20,000和从90,000到100,000的十四位常用对数表.后来,靠一位荷兰的出版者兼书商A·弗拉寇(Vlacq,1600—1666)的帮助,填补了从20,000到90,000之间的空敏.在这以前,即1620年,布里格斯的一位同事、格雷含姆学院的天文学教授E·冈特(Gunter,1581—1626)发表了间隔为弧分的角的正弦和正切的普通对数表.创造cosine(余弦)和cotangent(余切)这两个词的就是冈特,他以"冈特之链"为测量员们所熟知.布里格斯和弗拉寇发表的四个基本的对数表,直到1924年和1949年之间,才被为纪念对数发现三百周年在英国算出的二十位对数表所代替.

logarithm(对数)一词的含义是"比数" (ratio number),耐普尔最初用的是artificial number(入造数),后来才用logarithm.布里格斯引进术语mantissa(尾数),表示对数的小数部分,它是起源于伊特拉斯坎语的一个晚期拉丁名词,原意是"附加" (addition)或"补缺"(make weight),到了十六世纪才有"加尾数"的意思.术语characteristic(首数)也是布里格斯引进的,表示对数的整数部分,后来被弗拉寇所使用.奇怪的是,在早期的常用对数表中,即印尾数,也印首数;直到十八世纪才确立了目前的习惯,只印尾数.

耐普尔的惊人发明被整个欧洲积极采用,特别是天文学界,简直为这项发明而沸腾起来了. 拉普拉斯就认为;对数的发明"以其节省劳力而使天文学家的寿命增加一倍。" J·开普勒 (Kepler,在下一讲中我们要做详细的介绍) 为使对数在德国普及而做了大量工作. B·卡瓦列利(Cavalieri)在意大利, E·文加特(Wingate)在法国也做了同样的工作. 对于卡瓦列利,将在第19讲中做全面介绍, E·文加特是十七世纪英国的初等算术教科书的最 杰 出的作者,他曾在法国滞留多年.

正如在后面一讲中讨论非欧几何的发现时所表明的那样,在数学中时常会发生这种情况:一项特定的数学发明或发现,被几个人同时获得,就好像时机已经成熟,它必须涌现出来.然而,在谁先发明对数这个问题上,耐普尔只遇到一个真正的对手,他就是瑞士的钟表匠J·比尔吉(Būrgi, 1552—1632).比尔吉独立地设想并编制出对数表,于1620年发表,比耐普尔公布他的发明晚六年.当然,两个人在发表之前很久就有了对数的概念,不过人们一般都认为耐普尔在前.然而,两个人的途径是完全不同的,耐普尔的途径是几何的,比尔吉的途径是代数的.现在,对数普遍地被看成是指数.例如,如果 n=b*, 我们就说x是n的以b为底的对数,记为x=log_bn.由这个定义,对数定律不过是指数定律的再表述.对数的发现早于指数的应用这个事实,是数学史上的反常现象之一.

耐普尔出生于苏格兰首府爱丁堡附近的豪华的贵族庄园梅尔 契斯顿堡,当时他的父亲只有十六岁,他一生大部分时间都居住 在家乡,1617年,即他向全世界公布了他的伟大发明之后的第三 年,于家乡去世,

耐普尔把大部分时间和精力花费在那个时代政治和宗教的争论之中。他强烈地反对天主教,拥护清教徒领袖约翰。诺克斯和英王詹姆斯一世的事业。1593年,他发表了《圣约翰启示录的一个清晰发现》(A Plaine Discouery of the Reuelation of Saint John)一书,对罗马教会进行了深刻而广泛的攻击;在该书中,他努力证明。数皇是反基督的,并且,创世者打算把世界终结于1688年到1700年之间。这本书广泛流传,一直出了二十一版,至少有十版是作者在世时出的。耐普尔深信。他在子孙后代中的荣誉主要靠这本书。但是,事实证明他完全错了。现在,他的这本书已完全被遗忘,只有极少数人还知道它。相反,他之所以能够名垂青史,乃是由于他的数学消遗之一——发明对数。

耐普尔还是当时科学幻想小说的作者,他描写了各种魔鬼似

的军械,并附有设计方案和草图.他曾经预言:人们将会研制一种大炮,"能够彻底消灭四英里范围之内的、高度超过一英尺的一切生命";人们将会造出"能在水下航行的器械";人们还将会生产一种带有"活动开口"的战车,"能够对待来自各方面的攻击".他的这些预言在第一次世界大战时都已实现,出现了自动火炮、潜水艇和坦克.

耐普尔在进行政治和宗教的争论之众,喜欢研究数学和科学,并以其四项天才的成果而被载入数学史册,它们是:(1)对数的发明;(2)重新建立用于解球面直角三角形的十个公式的巧妙记忆法,称为圆的部分法则;(3)用于解球面非直角三角形的四个三角公式(称为耐普尔比拟)中的至少两个公式;(4)所谓耐普尔尺的发明,它用于机械地进行数的乘除运算和求数的平方根。有兴趣的学生可以在本讲的习题中找到关于后三项成果的简短讨论。

H·布里格斯为改进对数做了大量的工作,他曾一度光荣地占有英国的第一个数学教授席位,即托马斯·格雷斯姆爵士于1596年在伦敦格雷舍姆学院设立的几何学教授席位,曾一度担任牛津大学默顿学院院长、后来又当了伊顿公学院长和牛津大学欧几里得几何讲师的亨利·萨魏里爵士,于1619年在牛津大学设立了两个教授席位,一个是几何学的,一个是天文学的.布里格斯也是担任萨魏里几何学教授这个光荣职务的第一人.布里格斯在世时出版了十部著作,还留下六部未出版的著作.在他已出版的著作中包括关于航海术、欧几里得《原本》、对数和三角学的一些专论.

E· 冈特除了编制第一个角的正弦和正切的普通对数表以外,还设计出对数刻度尺,即一标有数字的线段,从尺的左端量起的距离与所标之数的对数成正比,利用一个分规,对尺上的线段进行加、减,便可机械地完成乘除运算.用两个同样的对数刻度尺,使一个沿着另一个滑动(如图56所示),从而实现上述线段的加和

减,这个思想起源于W·奥特雷德(Oughtred, 1574—1660). 虽 然奥特雷德早在1622年就发明了这样一种简单的计算尺,但是他在1632年出版的著作中才予以描述.

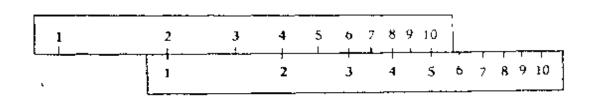


图 56

许多年来,在高中或大学低年级的数学课中都要讲对数,而且多年来,珍藏在精美的皮盒中的计算尺一直是校园中识别工程学生的标志.但是现在,随着功能高、价格低的袖珍计算器的出现,再也没有人愿意使用对数表或计算尺来进行计算了.在学校中,对数已不作为一种计算方法来讲授;那些制造高级计算尺的厂商已停止生产,就连一些著名的数学手册也已开始删去对数表.伴随着耐普尔的这一数学史上的里程碑而出现的产物,已逐渐进入了博物馆.

但是,在另一方面,对数函数决不会消亡,原因很简单,对数和指数的变化关系在自然界中、在分析学中都是十分重要的,因此,学习对数函数及其反函数即指数函数,将永远是数学教学的重要部分.

习 题

- 17.1. 试利用熟悉的指数法则,证明对数的下列 有用的性质:
 - (a) $\log_b mn = \log_b m + \log_b n$.
 - (b) $\log_b(m/n) = \log_b m \log_b n$.

- (c) $\log_b(m') = r \log_b m$.
- (d) $\log_b \sqrt{m} = (\log_b m)/s$.

17.2. 试证明:

- (a) $\log_a N = \log_b N / \log_b a$ (根据这个公式,我们能用以 b 为底的对数表算出以a为底的对数).
 - (b) $\log_N b = 1/\log_b N$.
 - (c) $\log_N b = \log_{1/N}(1/b)$.
- 17.3、求10的平方根,然后再求所得结果的平方根,依此类推,得到下表:

$10^{1/8} = 1.33352$ $10^{1/16} = 1.15478$ $10^{1/32} = 1.07461$	$10^{1/2048} = 1.00223$ $10^{1/2048} = 1.00112$ $10^{1/4096} = 1.00056$
$10^{as} = 1.333352$	111 - 1,011/2/11
$10^{1/4} = 1.77828$	$10^{1/512} = 1.00451$ $10^{1/1024} = 1.00225$
$10^{1/2} = 3.16228$	$10^{1/256} = 1.00904$

利用这个表,我们能计算 1 到10之间任何数的常用对数,因此,通过校正首数,就能算出任何正数的对数。例如,设N是 从 1 到 10之间的任何数,把 N 除以上表中不超过N的最大数。假定除数是 $10^{1/p_1}$,商是 N_1 ,因此 $N=10^{1/p_1}N_1$ 。依同样方式处理 N_1 ,并继续进行这个过程,得到

$$N = 10^{1/p_1} 10^{1/p_2} \cdots 10^{1/p_n} N_n.$$

直到N_{*}与1之间的差别仅在第六位小数时,停止下来,于是,精确到第五位小数,有

$$N = 10^{1/p_1} 10^{1/p_2} \cdots 10^{1/p_n}$$

因此

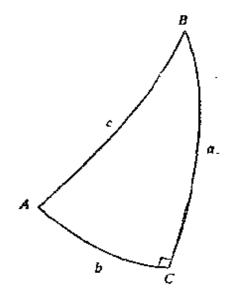
$$\log N = 1/p_1 + 1/p_2 + \cdots + 1/p_n$$
.

这个方法称为计算对数的根值法(radix method).

(a) 试计算log4.26.

(b) 试计算log5.00.

- 17.4. 存在可以用来解球面直角三角形的十个公式. 没有必要记忆它们,因为用耐普尔设计的两条法则很容易重新建立这些公式. 在图57中,画出一个球面直角三角形,依习惯用法标上字母,在该三角形的右边有一个被分成五部分的圆,除C 外,包括该三角形中所有字母,且字母顺序也相同; c. B, A上有一横线, 指其"余角"(例如, B 指90°-B). 角量 a, b, c, A, B 称 为圆的部分. 在这个圆中,对于任何一个给定的部分,有两个圆的部分与其相邻,有两个部分不与其相邻. 让我们称给定的部分为中部,两个相邻的部分为邻部,两个不相邻的部分为对部. 耐普尔的两条法则可以叙述如下:
 - 1. 任何中部的正弦等于两个对部余弦之积:
 - 2. 任何中部的正弦等于两个邻部正切之积.
- (a) 试对于每个圆的部分应用上述两条法则,推出用来解球面直角三角形的十个公式.
- (b) 联系着球面直角三角形的三个边 a, b, c 的公式, 称为这个三角形的毕达哥拉斯定理. 试推导球面直角三角形的毕达哥拉斯定理.



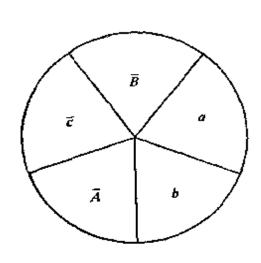


图 57

17.5 下列公式称为耐普尔比拟 (Napier's analogy) (analogy(比拟)这个词是按其古义"比例"来使用的),

$$\frac{\sin (A-B)/2}{\sin (A+B)/2} = \frac{\tan (a-b)/2}{\tan c/2},$$

$$\frac{\cos (A-B)/2}{\cos (A+B)/2} = \frac{\tan (a+b)/2}{\tan c/2},$$

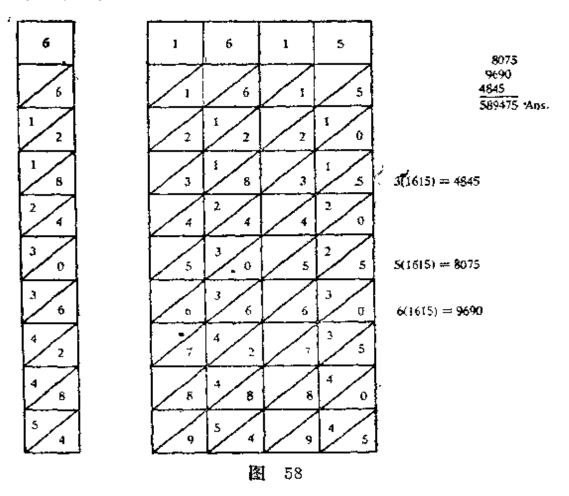
$$\frac{\sin (a-b)/2}{\sin (a+b)/2} = \frac{\tan (A-B)/2}{\cot C/2},$$

$$\frac{\cos (a-b)/2}{\cos (a+b)/2} = \frac{\tan (A+B)/2}{\cot C/2}.$$

这些公式与平面三角学的正切定律是相似的,它们可以用来解球面斜角三角形(已知两边及夹角或两角及夹边).

- (a) 在球面三角形中,已 知 a=125°38′, C=73°24′, B=102°16′, 试求A, C, b.
- (b) 在球面三角形中,已知 $a=93^{\circ}8'$, $b=46^{\circ}4'$, $C=71^{\circ}6'$, 试求A,B,c.
- 17.6 由于对于大数的乘法运算普遍感到困难,结果人们想出了进行乘法运算的机械方法.在那个时候,有口皆碑的是耐普尔的发明——耐普尔标尺,发明者在他于1617年发表的《尺算法》(Rabdologiae)一书中作了描述.这项发明与我们在习题13.9中介绍的印度人的格栅法基本相同,不同的只是.在这里是借助于预先准备的、由骨、木、金属或纸板制成的矩形长条来进行计算的.对于从0到9每个数字,都有一个相应的长条(例如图58之左图所示,便是相应于数字6的长条),在每个长条上都标着该数字的倍数.为了说明如何使用这些长条来进行乘法,让我们选取耐普尔的《尺算法》一书中的一个例子:试将1615乘以365.取头上标有1,6,1,5的四个长条,并排放在一起,如图58之右图所示.这时,不难读出1615分别乘以365中的5,6,3而得到的结果.8075,9690和4845(当遇到两个处于对角位置的数字时,便把这两个数字相加),然后,把这些结果加在一起,便得到所求的乘

积,如图所示.



- (a) 试制造耐普尔标尺,并进行某些乘法运算.
- (b) 试解释怎样用耐普尔标尺来进行除法运算.
- 17.7 (a)借助于对数表,做对数刻度尺,计划作为D尺,约长10英寸,用此刻度尺,以及一个分规,进行一些乘法和除法运算.
- (b) 做同样大小的两个对数刻度尺,分别称为 C尺、D 尺、 使C尺沿D尺滑动,来进行一些乘法和除法运算.
- 17.8 做长度正好为习题17.7中的D尺一半的对数刻度尺. 把这样两个短的对数尺首尾相接, 称之为 A 尺. 试说明如何用A 尺和D尺求平方根.
 - 17.9 做一个怎样的刻度尺,才能用它和D尺求立方根?
- 17.10 做和C尺、D尺一样的刻度尺, 不同的只是把C尺翻过来, 称之为CI尺. 说明如何用CI尺和D尺进行乘法运算. 为

了进行乘法运算,用CI尺和D尺比用C尺和D尺,好处何在?

参考文献

COOLIDGE. J. L., The Mathematics of Great Amateurs. New York: Oxford University Press, 1949.

HOBSON. E.W., John Napier and the Invention of Logarithms. New York: Cambridge University Press, 1914.

KNOTT, C. G., Napier Tercentenary Memorial Volume. London: Longmans, Green, 1915.

第 18 讲

科学的激发

海神尼普顿和地神盖亚之子安泰是一个力大无比的巨人,只要不离开母亲大地,他就有不可战胜的力量,许多来到他的国家的人都被迫与他殊死交战,不料有一天,海格立斯和安泰打得难解难分,而海格立斯知道安泰的神力之源,就把这个巨人举起,使他离开了大地,最后在空中将他打败,

对数学家来说有一个类似的比喻,正如巨人安泰是由大地母亲养育的那样,历史告诉我们,任何有意义并且持久的数学都孕育于现实世界之中.象安泰不能脱离大地一样,只有当数学与现实世界紧密结合时,它才会是强有力的.一旦数学远离现实世界这个坚实的大地,进入纯抽象这个朦胧的空中,它就会失去力量.因此数学必须回到现实世界,只有这样它才能恢复活力.

在十七世纪,由于两位杰出的数学家伽利略(Galiteo Gelilei, 1564—1642)和 J·开普勒(Kepler, 1554—1630)的一系列发现,导致了数学的复兴.伽利略通过在他二十五岁以前就已经开始的一系列实验发现了有关物体在地球引力场运动的许多基本事实.开

普勒在1619年前后归纳出著名的行星运动三定律.历史已经证明,这些成就对后来绝大部分数学分支的发展影响如此之大,以致它们必须被列为数学史上的两个里程碑.伽利略的发现导致了现代动力学的诞生,而开普勒的发现则产生了现代天体力学.这些学科的发展都需要一种新的数学工具——微积分,即能够研究变化、流量和运动的数学分支.

一种新型的数学诞生了.如果把新、旧数学加以比较,则可看出旧数学消极静止而新数学积极运动,因此旧的数学可比作照相术发展的静物摄影阶段,而新的数学可比作电影摄影阶段.另外,旧数学与新数学相比,如同解剖学和生理学,前者研究尸体而后者研究活体.再者,旧数学只涉及不变和有限的问题,而新数学则包括变化和无限的问题.

1564年伽利略出生于比萨,是一个穷困潦倒的佛罗伦萨贵族的儿子。他开始学医,但毫无兴趣,后来经父母同意改学科学和数学,在这些领域里伽利略具有很高的天才。当他还在比萨大学学医时就进行了历史上著名的观察,他注意到悬挂在大教堂的吊灯来回摆动的周期与摆动的弧长无关*.后来他又证明了摆的周期和摆锤的重量无关。伽利略二十五岁时受聘担任比萨大学的数学教授,据说正是在此期间他在比萨斜塔上演示了他的实验,由此证明重物体并不比轻物体下落的快,这与亚里士多德的学说恰好相反。根据球在斜面上向下的滚动,伽利略得出一条定律,物体下落的距离与其下落时间的平方成正比,这与现在所熟知的公式 $s=\frac{1}{6}gt^2$ 一致。

由于当地发生的一些不愉快的争论,使伽利略于1591年辞去 比萨大学的职位,第二年他接受了帕多瓦大学数学教授的职位, 那里充满了更适于科学研究的气氛,在帕多瓦的近十八年里,伽 利略继续进行实验和教学,获得了广泛的声誉,大约在1607年,

^{*} 这个结论近似成立, 在小振幅摆动的情况下近似值接近精确值。

伽利略在帕多瓦听说丹麦磨镜匠J·里珀沙姆(Lippersheim)发明了一种望远镜,他就开始研制自己的仪器,做出放大倍数大于三十倍的望远镜.他利用这架望远镜观测到太阳黑子(这与亚里士多德的太阳是完美无瑕的断言相反),看到月亮上的山脉,并注意到金星的相位、土星的光环以及木星的四颗明亮的卫星(所有这三项发现都为哥白尼的太阳系理论提供了证据).伽利略的发现引起了教会的反对.1633年他终于被宗教法庭传唤,被迫宣布放弃他的科学发现.几年后这位伟大的科学家双目失明,不得不呆在家里.1642年伽利略去世,正是在这一年牛顿诞生了.

我们把实验与理论的和谐统一这种现代科学精神的产生归功于伽利略.他不但创立了自由落体力学,而且还全面地奠定了动力学的基础,后来牛顿正是在此基础上才得以建立了动力学的数学理论.伽利略首先认识到真空中抛射体经过的路径具有抛物线的特性,还推测出动量定理,并发明了第一台现代类型的显微镜.早在1597年他就对两脚规进行了改进,这种简单的仪器在以后的两个多世纪里受到普遍的欢迎.

伽利略曾用意大利文撰写了两篇有名的专论·一篇是关于天文学的,题目是《关于托勒密和哥白尼两大世界新体系的对话》(The Two Chief Systems, 1632),论述了托勒密和哥白尼的宇宙观.另一篇是关于物理学的,题目是《关于两门新科学的谈话和数学证明》(The Two New Sciences, 1638),主要涉及动力学和材料强度·这两篇专论都采取三人对话的形式:见多识广的科学家萨尔维阿蒂,才智犀利的普通人沙格列陀和正统的亚里士多德派辛普利邱·正是第一部著作直接导致了对伽利略的审判和禁闭·在莱顿出版的第二部著作是他在被拘留的不幸年代里写成的、从这些著作中可以看出他已经认识到无限大和无限小的某些性质,例如无限类的等价性,这一思想后来成为十九世纪康托尔的集合和超限数理论的基础。

也许伽利略曾嫉妒与他同时代的著名科学家开普勒,因为开

普勒在1619年就公布了行星运动的三条重要定律,但是伽利略却 完全忽视了这些定律,

1571年开普勒生于德国斯图加特附近,并在蒂宾根大学开始了他的学业,曾想当路德教派牧师。同伽利略一样,他发现自己深感兴趣的不是最初选择的职业,而是科学,特别是天文学,因而他改变了原来的志向。1594年,开普勒二十多岁时接受了奥地利格拉茨大学的讲师职位,五年后成为著名的瑞典籍丹麦天文学家第谷(Tycho Brahe)的助手,当时第谷移居布拉格担任凯泽·鲁道夫二世的宫廷天文学家。不久以后也就是1601年,第谷突然去世,开普勒不仅继承了导师的职位,而且还继承了大量非常精确的数据,这些数据都是第谷观测天空中运动的行星位置时所做的记录。开普勒经过惊人的坚韧不拔的努力,从第谷的大量观测数据中,开始发现行星是如何在空间运动的。

人们往往会发现,只要不断思索长期努力,就没有什么解决 不了的问题, 托马斯·爱迪生说过, 发明创造需要百分之一的灵 感和百分之九十九的汗水,类似地,解决难题需要百分之一的想 象和百分之九十九的坚持,开普勒研究行星绕太阳的运动所做的 努力,简直达到了令人难以置信的地步,也许在科学史上没有比 这更能说明问题的例子了, 开普勒坚信哥白尼的行星以太阳为中 心在各自的轨道上运行的理论,全力探索并确定这些轨道的特性 和位置以及行星在轨道上运动的方式,根据已掌握的第谷的观测 记录,问题归结为要提出一个与第谷的观测完全一致的行星运动 模型. 第谷的观测记录非常可靠, 以致任何解如果和第谷的实测 位置相差甚至小到月亮视直径的四分之一,都被认为是不正确的, 必须抛弃。当时开普勒首先要发挥他的想象力,猜测出一些似乎 是合理的解,然后坚持作大量单调乏味的计算以便证实或推翻他 的猜测。开普勒曾进行了成百次毫无结果的努力和繁重的计算, 长期的艰苦工作并没有减少他的热情和耐心,最后他终于找到了 答案,提出有名的行星运动三定律,头两条定律于1609年发现,

第三条是在十年后的1619年发现的.

- 1. 行星在椭圆轨道上绕太阳运动,太阳在此椭圆的一个焦点上.
 - 2. 从太阳到行星的向径在相等的时间内扫过相等的面积:
- 3. 行星绕太阳公转周期的平方与其椭圆轨道的半长轴的立 方成正比.

根据第谷的数据经验地发现这三条定律,这是最有名的科学 归纳之一. 1619年开普勒非常自豪地为他的《宇宙谐和论》(Harmony of the Worlds)一书写了充满诗意的序:

我正在为同时代的人或者为后代——那也无关紧要 ——写一本书。我的书也许要等一百年才有一个读者,

上帝不是等了六千年才等到一个观测者吗?

开普勒的行星运动定律是天文学史和数学史上的里程碑,因为牛顿正是在努力证明这些定律的过程中,创立了现代 天体力学,非常有趣的是,在希腊人发现了圆锥曲线的性质之后一千八百年,它们竟会有如此光辉的实际应用,人们从不知道这样的纯数学可以得到意想不到的应用.

为了计算第二定律中的面积,开普勒不得不采用了一种原始的积分方法,这使他成为微积分的奠基人之一。开普勒在《测量酒桶体积的科学》(Stereometria doliorum vinorum, 1615)一书中,也应用了原始的积分方法求出93个不同立体的体积,这些体积是圆锥曲线弧分别绕曲线所在平面上的轴旋转而成的。这些立体包括环形曲面体和两个被开普勒称为苹果和柠檬的立体,后两种立体是圆的大弧和小弧分别以其对应的弦为轴旋转而成的。开普勒看到那时的计量员量酒时所用的某些粗劣方法,使他对这些问题产生了兴趣。后来卡瓦列利用不可分量方法对积分法做了进一步的改进,当时他很可能受到开普勒工作的影响。下一讲我们将讨论这种方法。

开普勒对多面体的研究也有显著的贡献. 他似乎 首先 认识

到反棱柱体(将一个棱柱体的顶面在其所在平面上旋转,使得顶面的各顶点对应于底面的各边,然后以之字形线连接两个面的顶点,这样便得到反棱柱体). 他还发现了立方八面体(cuboctahedron)、斜方十二面体(rhombic doclecahedron)和另一种斜方体(rhombic triakontahedron),其中第二种多面体存在于自然界中,如石榴石晶体. 四种可能的正星形多面体中有两种是开普勒发现的,另两种是由几何力学的开拓者路易. 泊素特(Louis Poinsot,1777—1859)在1809年发现的. 开普勒-泊素特正星形多面体是平面正星形多边形的空间对应图形. 开普勒对用正多边形(不必相同)覆盖平面的问题也做了开创性的研究工作.

开普勒把"焦点"一词引入圆锥曲面几何学之中,并用公式 π (a+b)估算半轴为 a 和 b 的椭圆周长。他还提出所谓的连续性原理: 假设在一个平面上无穷远处存在某些理想点和一条理想线,它们具有普通点和线的许多性质。于是他解释道: 我们可以认为直线在无限远处封闭, 两条平行线在无限远处相交, 抛物线是椭圆或双曲线的一个焦点退到无限远时的极限情况。这些思想被后来的几何学家发展了。

开普勒是一个坚定的毕达哥拉斯的信徒,因此他的工作常常是充满幻想的直觉和认真严肃的科学相混合的产物。据说,在个人生活上开普勒的命运是悲惨的,各种各样几乎难以忍受的人间不幸伴随了他的一生。当他只有四岁时,染上了天花,使视力受到严重的损害。他一生体弱多病,青年时代也是毫无欢乐的,他的婚姻给他带来了终生的痛苦,他最钟爱的孩子死于天花,他的妻子神经失常后死去,当格拉茨市落入天主教徒手中时,他被格拉茨大学开除,失去了讲师的职位,他的母亲被控行使巫术并被关进监狱,在此后近一年的时间里他竭尽全力试图教出他的母亲;他自己也险些被加上异端邪说的罪名;而且他的薪俸也总是被拖欠。据说他的第二次婚姻甚至比第一次更不幸,虽然他预先仔细分析了十一个女子的优缺点,但还是做出了错误的选择。为

了增加收入他不得不以占星术算命.1630年他外出催要久拖不付的薪俸,因染上热病死在途中,终年59岁.

习 题

- 18.1 伽利略指出,假设所有的物体以相同的恒加速度 8 下落,那么物体下落的距离d与下落所需时间t的平方成正比。试证明伽利略下列论点的推导过程。
 - (a) 如果v是时刻t的速度,则有v=8t.
- (b) 如果用v和t表示一个物体的下落速度和时间,而 用V和 T表示另一个物体的下落速度和时间,则有 v/V = t/T. 也 就 是 说,以v和t为直角边的直角三角形与以V和T为直角边的直角三角形相似。
- (c) 因为速度的增加是均匀的,所以下落的平均速度就是 $\frac{1}{2}v$,因此有 $d=\frac{1}{2}vt$ =以v和t为边的直角三角形的面积.
- (d) $d/D = t^2/T^2$. 同时证明 $d = \frac{1}{2}gt^2$.

伽利略根据观察球在斜面上滚下的时间,证明了上 面最后一个定律是正确的.

18.2 如图59所示,两 脚规是由一端以轴连接在一 起的两条臂组成的,每条臂 上刻有以连接轴为原点的简 单刻度。

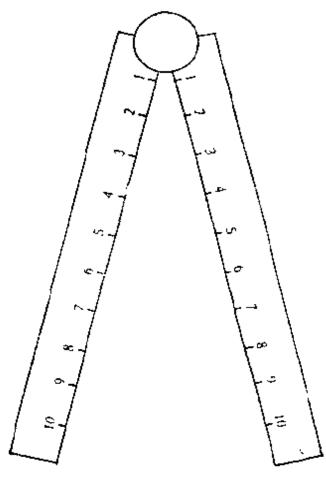


图 59

- (a) 说明如何用两脚规将一给定线段分为五等份.
- (b) 说明如何用两脚规改变图形的比例.
- 18.3 (a)说明如何利用两脚规(见习题 18.2) 求三个已知量 a, b, c的第四个比例量x(即求a:b=c:x中的x), 并应用于 外汇兑换问题.
- (b) 如果五年前开始投资,年复利 6%,则 现在的投资额是 150斯库弟,伽利略曾用两脚规计算出五年前的投资额。试 说 明 他是怎样做的。

在其他刻度的两脚规中常见的一种是以数的 平方(面积尺) 标刻度的,可以用来求数的平方和平方根,另一种是以数的立方 (体积尺)标刻度的,可以用来求数的立方和立方根,为了便于 工程师制图,还有的两脚规标有单位圆上某些特殊角度的弧所对 应的弦,另外,有的两脚规(称为金属尺)上面刻有中世纪时金银 铜铁等金属的标记,且以这些金属的密度为刻度,例如,可以用 来求与一已知铜球等重量的铁球的直径,

然而两脚规与计算尺相比, 既不精确也不方便,

18.4 试解释伽利略1638年在《关于两门新科学的谈话和数学证明》中所讨论过的下述几何悖论·

假定图60中的大圆沿直线从A到B滚动一周,则线段AB等于

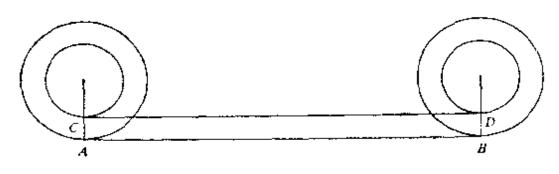


图 60

大圆的周长,而固定在大圆上的小圆也滚动了一周,因此 *CD* 等于小圆的周长,由此可以得出两个圆的周长相等。

这个悖论以前曾被亚里士多德所描述,因此有时又称为亚里士多德轮问题.

- 18.5 伽利略在《关于两门新科学的谈话和数学证明》一书中写道: "平方数的个数不大于所有数的全体,而所有数的个数也不大于平方数的个数."试解释这段话.
- 18.6 (a) 当行星公转速度最快时,它在运动轨 道 的什么位置上?
- (b) 用下列现代数据,近似验证开普勒第三定律.(A.U.是 天文单位的英文缩写,其长度为地球轨道的半长轴.)

行	公转周期(单位,年)	轨道 的 华长轴
水星	0.241	0.387A.U.
金 星	0.615	0.72 3 A.U.
地 球	1.000	1.000A.U.
火 基	1.881	1.524A,U
木星	11.862	5,202A,U.
土星	29.457	9.539A.U.

- (c) 如果一个行星轨道的半长轴为100A.U., 那么它的周期 是多少?
- (d) 如果一个行星的周期是 125 年,那么它的轨道的半长轴 是多少?
- 18.7 (a)假设两个行星在具有相同长轴的椭圆轨 道 上绕太阳公转, 其中一个椭圆的短轴是另一个的一半, 比较它们的周期 会有什么不同?

- (b) 月亮在椭圆轨道上绕地球转动,其轨道半长轴为地球半径的60倍,周期为27.3天,求在接近地球表面飞行的卫星的周期是多少?
- 18.8 用相同的正多边形镶嵌平面的问题是非常有趣的,设 n表示每个多边形的边数,
- (a) 如果我们不允许把一个多边形的顶点放在另一个多边形的边上,证明在每一顶点上多边形的个数由下式给出:

$$2+4/(n-2)$$
.

因此 n 必须等于 3 , 4 或 6 才能满足上述要求, 试构造出这些镶嵌并加以说明.

(b) 如果我们要求把一个多边形的顶点放在另一个多边形的边上,试说明在一个顶点所包含的多边形的个数由下式给出:

$$1 + 2/(n+2)$$
.

因此必有n=3或4才能满足上述要求, 试构造出这些 镶 嵌并加以说明。

- 18.9 平面的镶嵌包括以下几类:
- (a) 两种尺寸的等边三角形,其中大的边长是小的两倍,要求相同尺寸的三角形的边不重合;
- (b) 两种尺寸的正方形,其中大的边长是小的两倍,要求小正方形的边不重合;
 - (c) 相同的等边三角形和相同的正十二边形;
 - (d) 相同的等边三角形和相同的正六边形,
 - (e) 相同的正方形和相同的正八边形;
- (f) 假设我们有一种镶嵌形式由每一个顶点上三种不同的正 多边形组成,如果这三种多边形的边数分别为p,q,r,证明:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$$
.

此方程的一个整数解是p=4, q=6, r=12, 试构造出以上几种类型的平面镶嵌以及由相同的正方形、相同的正六边形和相同的正 十二边形构造成的平面镶嵌。

- 18.10 (a)开普勒将一个半径为r,周长为C的 圆分为许多很小的扇形,并将每个扇形看作高等于r、底等于扇形弧长的等腰三角形,由此受到启发得到圆的面积公式 $A = \frac{1}{2}re$. 试给出这个公式的推导过程.
- (b) 试采用上述开普勒的推导方法导出半径 为r、表面积为 S 的球的体积公式 $V = \frac{1}{3}rS$.
- (c) 试采用上述开普勒的推理方法导出半长轴为 a、半 短轴为 b 的椭圆的面积公式为 $A=\pi ab$.

参考文献

BRASCH, F. F., ed., Johann Kepter. 1571-1630. A Tercentenary Commemoration of His Life and Work. Baltimore Williams and Wikins, 1931.

CASPAR, MAX, Kepler, tr. by C. Doris Hellman, New York Abelard-Schuman, 1959.

FAHIE, J. J., Galileo, His Life and Work. London John Murray, 1903.

POLYA, GEORGE, Mathematical Merhods in Science (New Mathematical Library, No. 26). Washington, D. C., The Mathematical Association of America, 1977.

第 19 讲

无 限 分 割

B. 卡瓦列利(Cavalieri) 1598年出生于意大利的米兰,早年为耶稣会修士,就学于伽利略,从1629年起一直担任波洛尼亚大学教授,1647年逝世,享年49岁.他是他那个时代最有影响的教学家之一,他还写了许多关于数学、光学、天文学和占星学的著作.他最早认识到对数的重要价值,并为把对数介绍到意大利做了许多工作.但是,他对数学的最大贡献是在1635年发表的一篇阐述不可分量法的专论,题为《不可分量儿何学》.(Geometria indivisibilibus).同现代数学中的许多问题都起源于古希腊一样,不可分量法可以追溯到德谟克利特(Democritus,大约公元前410年)和阿基米德(Archimedes,大约公元前287—212年).很可能是开普勒在积分方面所做的尝试,直接启发了卡瓦列利.但是,无论如何,卡瓦列利的《不可分量几何学》一书的发表,应当作为数学史上的里程碑。

卡瓦列利关于不可分量法的专论写得晦涩难懂,使人很难确切地理解他所说的"不可分量"究竟指的是什么。一个给定的平片的不可分量似乎是指这个平片的弦,一个平片可以看成是由无限多个这样的平行弦组成的,一个给定的立体的不可分量似乎是指这个立体的截面,一个立体可以看成是由无限多个这样的平行截面组成的。这时,卡瓦列利说,如果我们让组成某个平片的平行的不可分量集合中的每个元素沿其轴线滑动,使得这些不可分量的端点仍然描绘出一个连续的边界,则这样形成的新的平片的面积和原平片的面积相等,因为二者是由同样一些不可分量组成的。类似地,如果使一个立体的平行的不可分量集合的元素滑动而形

成另一个立体,则其体积和原立体的体积相等.(后一结论可以形象地说明,取垂直的一摞卡片,然后让卡片错动,使侧面成为曲面,则错动的一摞卡片同原来的一摞卡片体积相等.)把这些结论稍加推广,便给出所谓卡瓦列利原理.

- 1. 如果两个平片处于两条平行线之间,并且如果平行于这两条平行线的任何直线与这两个平片相交,所截二线 段长度相等,则这两个平片的面积相等。
- 2. 如果两个立体处于两个平行平面之间,并且如果平行于这两个平行平面的任何平面与这两个立体相交,所得二截面面积相等,则这两个立体的体积相等.

卡瓦列利原理是计算面积和体积的有用工具,它们的直观基础很容易通过现代的微积分面严格化.如果作为直观上的显然结果面承认这两个原理,那么我们就能够解决许多求积问题,解这些问题通常需要使用更先进的微积分方法.

让我们举例说明卡瓦列利原理的应用,首先应用原理 1 (即 平面情况)来求两半轴分别为 a 和 b 的椭圆的面积,然后应 用 原理 2 (即立体情况)来求半径为 r 的球的体积.

让我们考虑在同一直角坐标系中画出的椭圆

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$
, $a > b$

和圆

$$x^2 + y^2 = a^2$$

如图61所示,由每个方程解出y,我们分别得到

$$y = (b/a)(a^2-x^2)^{1/2}, y = (a^2-x^2)^{1/2}.$$

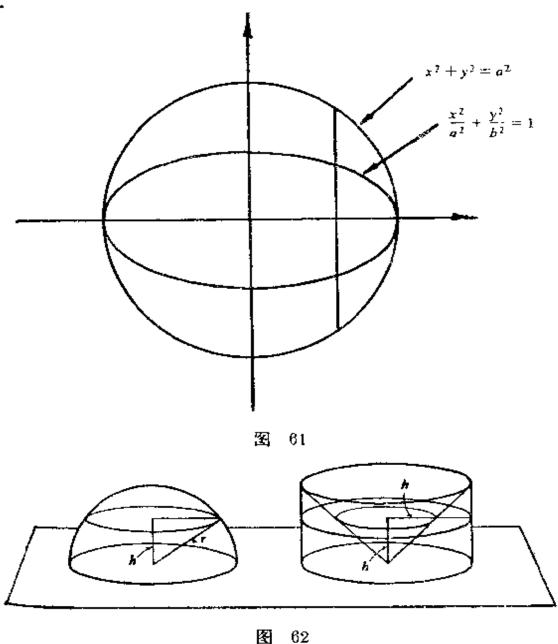
由此可知,椭圆和圆的相应纵坐标之比是b/a. 所以,椭圆和圆的相应弦之比也是b/a. 因此,根据卡瓦列利原理 1,椭圆和圆的面积之比也是b/a. 我们得到结论:

椭圆的面积

$$=(b/a) \times 圆的面积$$

$$= (b/a) (a^2\pi) = ab\pi$$

这基本上就是开普勒求两半轴为 a 和 b 的椭圆面积时 所 用 的 方 法·



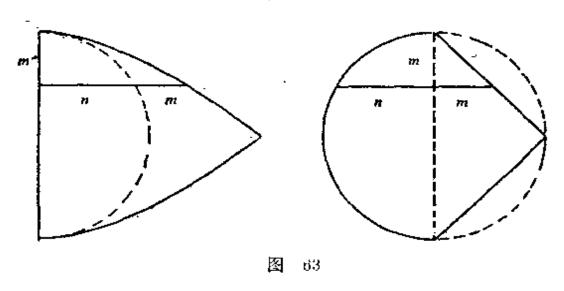
现在,让我们来求半径为r的球的体积公式。在图62中,左边是一个半径为r的半球,右边是一个半径为r、高为h的圆柱和一个以圆柱的上底为底、以圆柱的下底中心为顶点的圆锥。这个半球和挖出圆锥的圆柱处在同一平面上。这时,用平行于底面、与底面距离为h的平面截两个立体,所得截面一个是圆形,一个是环形。用初等几何不难证明,这两个截面的面积都等于 $\pi(r^2-$

h³).根据卡瓦列利原理 2 (即立体情况),这两个立体具有相等的体积,所以球的体积为

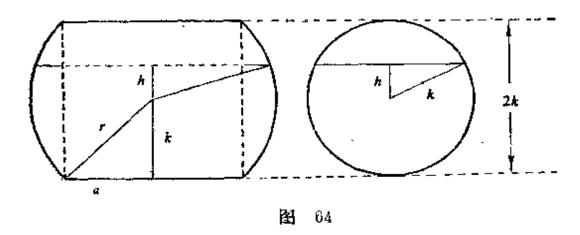
$$V = 2$$
 (圆柱的体积 - 圆锥的体积)
= 2 $(\pi r^3 - \pi r^3/3) = (4/3)\pi r^3$.

作为卡瓦列利原理 1 (平面情况)应用的另一个实例,我们考虑图63左边的面积,不难得到一个用来进行比较的面积,即图63右边所画的图形,由此可知,所求的面积是,

$$A = (\pi/2 + 1)r^2$$
.



作为卡瓦列利原理 2 (立体情况)应用的另一个实例,让我们来求按下述方式得到的球环的体积: 把一个半径为 τ 的球挖去一个孔,这个孔的半径为a,轴线与球的极轴重合,如图64左图所示: 我们用直径等于球环之高的一个球作为用来进行 比 较 的 体



积,如图64右图所示.现在,我们用与这两个立体的中心距离为 h的一个水平平面截这两个立体,对于球环,我们得到一个环形截 面,它的面积是

$$\pi(r^2-h^2)-\pi a^2=\pi(r^2-a^2-h^2)$$
.

对于球,我们得到一个圆形截面,它的面积是

$$\pi(k^2-h^2) = \pi(r^2-a^2-h^2)$$
.

由此可知,球环的体积V与半径为k的球的体积是相等的,也就是说,

$$V = (4/3) \pi k^3$$
.

假设卡瓦列利原理成立,并始终如一地应用它,可以大大简化中学立体几何课程中遇到的许多体积公式的推导过程.这种方法已被许多教科书的作者所采用,并且在教学法的立场上受到人们的支持.例如,在推导四面体的公式时,困难的部分是首先要证明底面相等、高相等的任何两个四面体具有相等的体积.这个实质性的困难在从欧几里得《原本》以来的一切立体几何研究中所反映出来了.但是,如果应用卡瓦列利原理,则这个困难便很容易消除.

卡瓦列利的不可分量(即一种图形的极微小的部分)的概念, 引起了热烈的讨论,并受到研究这个课题的一些学者,特别是瑞士的金匠兼数学家 P. 古尔丹(Guldin,1577—1642)的严厉批评。卡瓦列利试图改进他的论证来应付这些异议,未获成功。法国的几何学家,物理学家 G. P. de 罗伯瓦尔(Roberval,1602—1675)熟练地掌握了这种方法,并且声称是这种方法的一个独立发明者。E. 托里拆利(Torricelli,1608—1647)、P. de费马(Fermat,1601(?)—1685)、B. 帕斯卡(Pascal,1623—1662)、G. de 圣文森特(Saint-Vincent,1584—1667)、I. 巴罗(Barrow,1630—1677)等人有效地应用了不可分量法或者和它很相似的方法。在这些人的工作过程中,得到了与下列这样一些积分等价的结果。

$$\int x^n dx$$
, $\int \sin x dx$, $\int \sin^2 x dx$, $\int x \sin x dx$.

如果把两个平片适当放置,能使它们在一族平行线中的每一条直线上截出的两个线段的长度都相等,或者如果把两个立体适当放置,能使它们与一族平行平面中的每一个平面相交面成的两个截面的面积都相等,则把这两个平片,或者这两个立体,称为是卡瓦列利全等的。当然,两个卡瓦列利全等的图形具有相等的面积(平面情况)或者相等的体积(立体情况)。关于卡瓦列利全等,有一些奇特的现象,例如:

- 1. 虽然不存在与一个给定的圆为卡瓦列利全等的多边形, 但是却存在与一个给定的球为卡瓦列利全等的多面体(实际上是 一个四面体).
- 2. 虽然存在体积相等、但不是卡瓦列利全等的四面体,但 是任何两个面积相等的三角形都是卡瓦列利全等的.

习 题

- 19.1 试应用现代积分法证明卡瓦列利原理.
- 19.2 试应用卡瓦列利原理 1,求由曲线 $b^2y^2 = (b+x)^2(a^2-x^2), b \geqslant a > 0$

围成的图形的面积.

- 19.3 一个通过直圆柱底面中心的倾斜平面,从圆柱中截出一个柱形楔,称做蹄形尖劈.设圆柱的半径为r,尖劈的高为h,试应用卡瓦列利原理2,求这个尖劈的体积.
- 19.4 试证明:不存在与一个给定的圆为卡瓦列利全等的多边形。
 - 19.5 试求一个与给定的球为卡瓦列利全等的多面体,
- 19.6 试应用卡瓦列利原理 2 ,求一个圆. 环的体积,这个圆环是使半径为 r 的圆绕圆所在平面内、与圆心距离为 $c(c \ge r)$ 的一条直线旋转而成的.
 - 19.7 (a)试证明:任何三棱柱都能划分为三个三棱锥,其中

每两个三棱锥都具有面积相等的底面和长度相等的高:

- (b) 试应用卡瓦列利原理 2 证明:如果两个三棱锥的底面积相等、高相等,则它们的体积相等:
 - (c) 试证明,三棱锥的体积等于其底与高之积的三分之一,
- 19.8 推广的平截头锥体是这样的立体:具有两个平行的底面,平行于底面的截面面积是它们与一个底面的距离的二次函数.
- (a) 试证明: 棱柱、尖劈(直三棱柱转到以其一个侧面 为 底 的位置) 和棱锥的体积由平截头锥体积公式

$$V = \frac{h}{6}(U + 4M + L),$$

给出,其中h为高,U,L和M分别为上底、下底和中截面的面积。

- (b) 试应用卡瓦列利原理 2, 证明: 推广的平截头锥体的体积由平截头锥体体积公式给出:
 - (c) 试应用积分法证明(b)中的论断,
- 19.9 试证明. (a)球,(b)椭球,(c)蹄形尖劈(见习题19.3),(d)Steinmetz体*(两个半径相等的直圆柱,两轴垂直相交,其公共部分称为Steinmetz体)都是推广的平截头锥体的特例,然后,求出它们的体积表达式.
- 19.10 假设两个立体界于两个平行平面之间,平行于 这 两个平面的任何平面与两个立体相交,所得到的两个截面的周长都相等,那么试问,这两个立体的侧面积是否相等?

参考文献

BOYER C. B., The Concepts of the Calculus. New York: Dover, 1959.

^{*} Steinmetz, 是德文中借用来的, 音, 施泰恩美茨, 意思是"石匠", ——译 者注

第 20 讲

变换一求解一反演法

数学家运用的最有效的方法之一,就是所谓变换一求解一反演法.这个方法的思想实质在于,为了解决一个困难的问题,首先通过某种简化程序把它变换为一个比较容易的等价问题,然后求解这个比较容易的问题,最后反演简化程序从而得到原问题的解.让我们举例说明这种思想.

假设有人用法语问我们一个问题,而我们对法语 不 怎 么 精 通. 那么,我们往往首先把这个问题用我们最熟悉的语言——汉语"翻译(变换)过来,然后用汉语思考(求解)这个问题,给出一个汉语的答案,最后再把这个汉语的答案翻译(反演)成法语. 这样 就解答了原来的问题.

另外,假设有人要我们求出表示两个给定的罗马数字LXIII和XXIV之积的罗马数字。那么,我们就会首先把这两个给定的罗马数字变换成相应的印度一阿拉伯数字63和24. 然后,借助熟知的乘法运算求解这个用印度一阿拉伯数字表述的问题,得到乘积1512,最后,再把这个结果改写(反演)为罗马数字MDXII,这就是原问题的答案。

现在,让我们来考虑一个稍微难一点的问题,假设我们想要证明方程

$$x^7 - 2x^5 + 10x^2 - 1 = 0$$

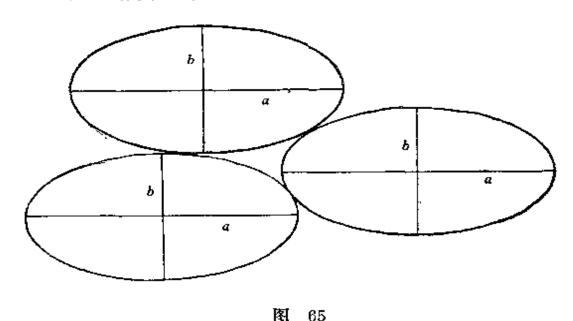
没有大于 1 的根. 通过代换x=y+1, 把给定的方程变换为 $y^2+7y^6+19y^5+25y^4+15y^3+11y^2+17y+8=0$.

因为这个新方程的根比原方程的根小 I (y=x-1), 所以我们只须证明新方程没有大于 0 的根,这个等价的问题不难求解,因为新

¹⁾ 原文为"英语"。----- 译者注

方程的所有系数都是正的,所以 3 不能大于 0, 否则各项之和不能等于 0. 最后,进行逆变换(反演)便得到所要求的结果。

作为最后一个例子,假设我们想要证明(见图65)。由三个全等的、方位相同的、两两外切的椭圆所围成的曲边三角形的面积与这三个椭圆的相对位置无关。我们知道,通过适当的正交投影



可以把三个椭圆映射成三个圆,它们的半径等于椭圆的短半轴,让我们采用使得这三个相切的全等椭圆映射成三个相切的全等圆的正交投影来变换所考虑的问题的图形(见图66). 因为我们知道,在正交投影之下,相等的面积映射成相等的面积,所以我们只须证明,在经过投影的图形中,曲边三角形的面积与三个全等圆的相对位置无关,我们很容易求解这个问题,因为它是显然的,最后,反演正交投影,便可得到原问题的解答。

上述方法不仅可以用来求解问题,而且还可用来发现新的事实。首先把一个给定的数学问题变换成一个新的问题,然后研究这个新的问题,发现它的某种性质,最后进行逆变换(反演),从而得到原问题的某一性质。这种方法也是数学家经常采用的,称为变换一发现一反演法。

例如,考虑上面最后一个用到正交投影中的例子.现在,我

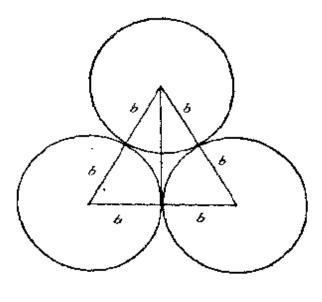


图 66

们知道,在P之下,面积A映射为面积 $A' = A\cos\theta$,其中 θ 是原图所在平面和投影平面之间的夹角.不难证明,在我们所考虑的情况下, $\cos\theta = b/a$,其中a和b是椭圆的两个半轴.设A和A'表示投影前和投影后曲边三角形的面积,由初等几何求出

$$A' = b^2(\sqrt{3} - \pi/2)$$
.

由此可知

 $A=A'\sec\theta=b^2(\sqrt{3}-\pi/2)(a/b)=ab(\sqrt{3}-\pi/2)$. 我们应用变换一发现一反演法,很巧妙地求出了原来的曲边三角形的面积.

数学家应用变换一求解一反演法的一个最精采、最深入、最富有成果的例子,就是所谓解析几何.当向高中学生介绍这种求解几何问题的新方法时,会使他们感到无比兴奋.——解析几何与其说是一个几何学分支,不如说是一种几何方法.

正如我们将会看到的,解析几何的思想实质,对平面情况来说,就是在平面上的点和有序实数对之间建立对应关系,因面可以在平面上的曲线和含两个变量的方程之间建立对应关系,使得对于平面上的每一条曲线,都存在一个确定的方程f(x, y)=0, 反之,对于每一个这样的方程,都存在平面上的一条确定的曲

线,即一个点的集合.同样,我们也可以在方程f(x, y)=0的代数的、解析的性质和与其相联系的曲线的几何性质之间建立对应关系.这样,我们可以很巧妙地把证明一个几何定理的问题转化为证明一个相应的代数或解析定理的问题.不仅如此,应用这种方法,还可以由一个已知的代数的或解析的结果,发现一个新的意外的几何结果.因此,解析几何确是一种卓有成效的方法,不仅可以用来求解几何问题,还可以用来发现新的几何结果.

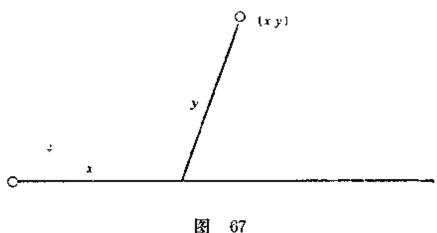
解析几何是谁发明的,是在什么年代发明的,对于 这些问 题,在数学史学家当中存在不同的意见.其中许多不同的意见是 由于对什么是解析几何没有一致的看法而产生的。有一些人认为 解析几何是在古代发明的,他们举出众所周知的事实, 借助于适 当的坐标来确定点的位置,这个概念古已有之,埃及人和罗马人 在测量地形时、希腊人在绘制地图时、都曾利用这个概念。说明 希腊人发明解析几何的最有力的事实是: 阿波罗尼乌斯从与圆锥 曲线的某些笛卡儿方程等价的几何性质(这种思想起源于梅 纳 科 莫斯(Menaechmus,约公元前350年))导出了他的内容丰富的圆锥 曲线几何学,另一些人则认为解析几何的发明应归功于N,奥 雷 斯姆(Oresme,约1323-1382). 奥雷斯姆在他的一篇数学短论中 用图线表示因变量对自变量的依赖关系(自变量可以取微 小的 增 量),以说明某些规律,这时已经预示了解析儿何的另一方 面 的 作用. 奥雷斯姆的拥护者在他的著作中看到了这样一些成就: 第 一次明确地引人直线的方程,把某些几何概念从二维空间推广到 三维空间, 甚至四维空间, 奥雷斯姆的论著写成后的一百年间, 曾被多次印刷,因此,对后来的数学家可能产生了影响。

关于解析几何的上述观点,看来从一个或几个方面歪曲了这个学科·解析几何的实质在于它的变换一求解一反演的特征,也就是说,首先把一个几何问题变换为一个相应的代数问题,然后求解这个代数问题,最后反演代数解而得到几何解·由此可知,只有当代数方法和代数学的符号化得到充分发展以后,解析几何

才能够具有高度实用的形式.因此,大多数的历史学家的意见要正确得多,他们认为R.笛卡儿(Descartes,1596—1650)和P.de 费马(Fermat,1601?—1665)这两位法国数学家在十七世纪做出的决定性贡献才是解析几何的真正起点.的确如此,在这两位数学家对这一学科的发展给以推动以前,确实并不存在我们所熟悉的这种形式的解析几何.这两位数学家所做出的首创贡献,可以被看成是最伟大的数学史上的一个里程碑.

认为笛卡儿发明解析几何的根据是他在1637年发表的著名的 一般科学哲学论著《更好地指导推理和寻求科学真理 的 方 法 论》 (Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences). 这本书有三个附录, 最后一个 附录 即第三个附录的标题是《几何学》(La géométrie), 共中包括笛 卡 儿对解析几何的贡献,这个附录首先对一些代数几何学的原则做 了解释,比希腊人有明显的进展,对于希腊人来说,一个变量相当 于某个线段的长度,两个变量的乘积相当于某个矩形的面积,三 个变量的乘积相当于某个长方体的体积, 三个以上变量的乘积, 希腊人就没法处理了. 笛卡几不这么考虑, 他认为: 与其把x² 看 作面积,不如把它看作比例式 $1:x=x:x^2$ 中的第四项,从而 x^2 就可 以用一个适当的线段来表示,只要x是已知的,就不难作出这个 线段. 这样,只要给定一个单位线段,我们就能用一个线段的长 度来表示一个变量的任何次幂或任意多个变量的乘积,而当变量 的值被指定时、我们就能用欧几里得工具实际作出这个线段的长 度来,在《几何学》中,笛卡儿把几何算术化了,在一个给定的轴 上标出 x, 在与该轴成固定角的直线上标出长度 y, 便可作 出 使 其x值和y值满足给定的关系式的点(见图67). 例如,如果我们 有关系式 $y=x^2$,则对于 x 的每一个值,我们能作出对应的 y,即 上述比例式的第四项。笛卡儿最感兴趣的是。对于按运动学定义 的曲线求出这样的关系式:

在与笛卡儿系统阐述现代解析几何基础的同时,费马也注意



到这门学科,费马要求承认他发明解析几何的理由是:他在1636 年9月给罗伯瓦尔(Roberval)的一封信中说到,他有这个概念已 经七年了,在他死后发表的论著《平面和立体的轨迹引论》(Isogoge ad locus planos et solidos) 中,记载了这项工作的一些细节. 在这里,我们见到了一般直线和圆的方程,以及关于双曲线、椭 圆、抛物线的讨论。在一部1637年以前完成的、关于切线和求面 积的著作中,费马解析地定义了许多新的曲线、笛卡儿只提出了 很少几种由机械运动生成的新曲线,而费马则提出了许多以代数 方程定义的新曲线. 曲线 $x^{m}y^{m}=a$, $y^{n}=ax^{m}$ 和 $r^{n}=a\theta$, 现在仍然 称为费马的双曲线、抛物线和螺线, 因此, 在很大程度上, 笛卡 儿是从一个轨迹出发然后来寻找它的方程的,而费马则从方程出 发然后来研究轨迹, 这正是解析几何基本原理的两个 相 反 的 方 面.

许多初等解析几何教程内容过于贫乏,以致不能使学生真正 诱彻地理解这一学科,特别是那些旨在为初次学习微积分的学生, 提供尽可能少的必备的解析几何知识的课本更是如此,因此,许 多学生在解析几何课中学到的只不过是如何画出一些点和曲线, 以及由给定的某种标准形式的方程来判别圆锥曲线形状的方法. 在对解析几何进行的这些简略处理中, 学生们决不会感到这一学 科的巨大威力, 也决不会认识它的惊人的适应性、多样性和广泛 的适用性, 也不大可能见到利用这种新方法解决的几何难题, 因 而也就决不会看出解析几何的发明在几何学中所起的作用. 学生们对于不能了解这一学科的完美性和强大威力必定会感到遗憾, 因而对于这种不明智的教学方法也会感到不满.

为了把中学几何的综合方法同新的解析方法进行比较,我们考虑命题,三角形的三条中线相交于一点,这一点将每一条中线分为三分之一和三分之二,请读者回忆在中学课程中是怎样证明这个命题的,如果想不起来的话,就请自己用中学时学过的方法给出一个证明,读者往往会失败,因为用中学的方法证明这个命题,要求画一些辅助线,可是,既不容易记住,又不容易猜想怎样来画这些辅助线。

在大多数中学平面几何课本中对于这个命题给出的证明如下 所述(见图68).设三角形ABC的中线BE和CF相交于G,并设M和N分别表示BG和CG的中点.作FE,MN,FM,EN.这时,FE平行于BC且等于BC的二分之一(三角形两边中点的连线平行

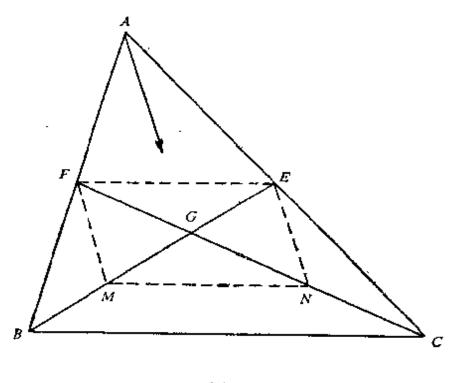


图 68

于第三边且等于第三边的二分之一)。同理,MN也平行于BC且

等于BC的二分之一. 所以,FE与MN平行且相等,因此FENM是一个平行四边形. 由此可知, MG=GE, NG=GF. 也就是说,这两条中线相交于一点G, 这一点处于从每一个顶点到对边中点的连线的三分之二的地方. 因为对于三角形 ABG 的任何一对中线来说,情况都是如此,所以最后得到结论: 三角形的三条中线相交于一点, 且将每一条中线分为三分之一和三分之二. 三角形的三条中线的公共点, 称为三角形的重心.

必须承认,尽管上述证明十分完美,令人喜爱,但是既不容易回想起来,也不容易自己想出——既不便记忆,也不知如何着手去做(即画辅助线 F E, MN, FM, EN). 这就是综合方法的主要困难——解题者不知如何下手,因为没有向他指出证明的步骤.

现在让我们重新证明关于三角形中线的这个命题,这一次用解析几何的方法。把三角形ABC随意放在一个笛卡儿直角坐标系之中(见图69)。这时,譬如说,顶点 A, B, C 相对于这个坐标系的坐标为(a_1 , a_2),(b_1 , b_2)和(c_1 , c_2)。让我们求出中线AD的第二个三等分点G的坐标(B_1 , B_2)。为此我们所需要的只是解析几何中的比例公式。设P为线段MN上的一点,MP/PN=r/s,则点P的坐标(P_1 , P_2)由下列公式给出。

 $p_1 = (sm_1 + rn_1)/(s+r), p_2 = (sm_2 + rn_2)/(s+r),$ 其中M和N的坐标分别为 (m_1, m_2) 和 (n_1, n_2) . 利用上 述 比 例公式,我们求出点D的坐标 (d_1, d_2) 为

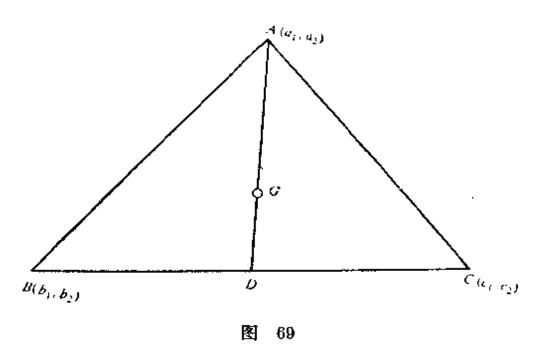
$$d_1 = (b_1 + c_1)/2$$
, $d_2 = (b_2 + c_2)/2$.

再次利用上述比例公式,我们求出点G的坐标(g_1 , g_2)为

$$g_1 = (a_1 + 2d_1)/3 = (a_1 + b_1 + c_1)/3,$$

 $g_2 = (a_2 + 2d_2)/3 = (a_2 + b_2 + c_2)/3.$

用完全同样的方法,或者直接由对称性原理,可知点G也是中线 BE和CF的第二个三等分点,由此得到结论,三条中线相交于点 G,点G三等分每一条中线,于是命题得证.



考察上述证明,可以看出,我们没有遇到在利用综合方法时出现的那样严重的困难。也就是说,首先怎样做,接着怎样做,以后怎样做,都不成问题。首先把三角形置于坐标系之中,并确定一些给定的点的坐标。然后,为了证明三条中线具有公共的第二个三等分点,设法求出每一条中线的第二个三等分点的坐标。这就颇具分析法的特点,至于下一步应当如何处理,一般说来,我们是十分清楚的。当然,为了实现这个过程,我们必须有一些可供使用的解析几何公式(在我们考虑的例子中,需要用到比例公式)。正因为如此,在初等解析几何教程中,首先都要建立这样一些有用的公式。

在三维空间中,与上面刚刚证明的这个命题对应的命题称为康曼丁那定理"。我们首先把四面体的顶点与其对面的重心的连线定义为四面体的中线。康曼丁那定理如下所述。四面体的四条中线相交于一点,且此点四等分每一条中线。请读者设法给出这个定理的解析证明,并且肯定将会发现二维定理的解析证明可以

¹⁾ 它是由F,康曼丁那(Commandino, 1509—1575)在他的著作中给出的,古希腊人可能已经知道这个命题。

直接推广到三维情况,因此,解析方法的另一个优点是,一个解析证明往往很容易被推广,使之包括更高维或更一般的情况,

综上所述,我们可以说,与综合方法相比,解析方法的一个 重要优点在于. 当采用解析方法时,对于在解题过程的每一步该 怎样做,我们都很清楚,而当使用综合方法时,则必须依靠"试 错法". 但是,这是否意味着解析方法或多或少是例行程序,而解 题者已经没有发挥才能的余地呢? 当然不是,因为尽管在解析证 明的每一步,我们都知道该做什么,但是实际做起来却是另一回 事. 所需要的代数运算可能会太复杂而难以实行;实际上,我们 的代数能力有限,往往不能解决问题. 例如,当我们用解析方法 来证明一个命题时,有时会出现这样的情况. 我们所需要做的只 是解一个给定的方程,但是解这个方程即使可能,也是非常困难 的. 因此,解析几何的不足之处在于. 我们往往知道该做什么, 但是缺少办法.在这种情况下,解题者必须通过某种巧妙的途径, 以避免遇到代数上的困难,这就是说,当利用解析方法时,仍然 需要解题者的技巧和天才.

然而经验表明,在综合方法和解析方法这两种方法当中,一般地说,解析方法适用范围比较广,比较有力,比较便于应用,但是一个优秀的几何工作者肯定毫不犹豫地采用最适合于所研究的问题的一种方法.

普罗克拉斯(Proclus, 410—485)在《欧德姆斯概要》(Eudemian Summary)—书中写道:埃及的第一位国王、亚历山大里亚大学的创始人托勒玫(Ptolemy Soter)为了向欧几里得学习几何学而光顾这所学校.他发现这门学问是很难的,有一天他问他的老师:"学习几何学难道说就没有捷径可走吗?"欧几里得回答:"国王陛下,在现实世界上有两种道路,供普通人行走的道路和供国王行走的道路.但是,在几何学中没有王者之路."因为许多学生都感到学习几何学比学习代数学要困难得多,所以或许可以说,解析几何就是欧几里得认为不存在的"几何学中的王者之路".

有两个描述促使笛卡儿发明解析几何的最初启示的传说。一个传说认为,笛卡儿是在梦中得到启示的。在一个圣马丁节的前夕,即1619年11月10日(那时笛卡儿服役的军队正驻扎在多瑙河岸度假),笛卡儿做了三个生动而连贯的梦。笛卡儿认为正是这些梦改变了他整个生活道路。他说,这些梦向他揭示了"一门奇特的科学"和"一项惊人的发现"。笛卡儿从未清楚地说明这门奇特的科学和这项惊人的发现究竟是什么,但是我们可以相信,它就是解析几何,即代数学在几何学中的应用,以及如何化一切科学为几何学。直到十八年以后,即1637年,笛卡儿才在他的著名的出版物中详细说明他的某些思想。

另一个传说或许何那个"牛顿与下落的苹果"的故事有些相似。它说的是:一天早晨,当笛卡儿在床上刚刚睡醒时,在他的头脑中产生了关于解析几何的最初闪念。他看见一只苍蝇正在他的屋角的天花板上爬,他突然想到,如果知道了苍蝇与两个相邻的墙壁的两个距离之间的关系,那么就能够描绘苍蝇在天花板上爬过的路线。虽然这第二个传说可能是虚构的,但是它在教学上很有价值。

习 题

- 20.1 (a) 试证明使一个椭圆的内接三角形具有最大面积的必要和充分条件是,这个三角形的重心与椭圆的中心相重合,
- (b) 试证明在一个椭圆中,一切等面积的弓形之底的包络是一个与原来的椭圆同心的、相似的、方位相同的椭圆.
- 20.2 (a) 试列出当使用直角坐标系时将会用到的一些公式,
 - (b) 上面列出的哪些公式当使用斜角垫标系时仍然成立?
 - 20.3 (a) 试给出康曼丁那定理的一个解析证明.
 - (b) 试给出康曼丁那定理的一个综合证明.

- 20.4 (a) 连接四面体各对相对的棱的中点的线段称为四面体的双中线(bimedian), 试用解析方法证明四面体的三条双中线交子一点(即四面体的重心),且被这一点二等分。
- (b) 试证明,四面体的两对相对的棱的平方之和,等于其余一对相对的棱的平方之和加上关于这一对棱的双中线的平方的四倍,
- (c) 试证明:四面体的各棱的平方之和等于三条双中线的平方之和的四倍.
- 20.5 点 P 与给定直角三角形的斜边的距离的平方,等于它与两个直角边的距离之积,试求点 P 的轨迹.
 - 20.6 试用解析方法证明: 三角形的三高交子一点:
- 20.7 (a) 试用解析方法证明: 平面四边形的四个边的中点是一个平行四边形的顶点:
 - (b) 如果四边形不是平面的,那么上述结论是否仍然成立?
- 20.8 一群强盗按下述方式在一个岛上埋藏了一件珍宝.在海岸附近有两块大石头和一棵棕榈树.一个强盗从一块石头出发,沿着与这块石头和棕榈树的连线垂直的方向前进,走过的距离等于这块石头与棕榈树之间的距离.另一个强盗从另一块石头出发,按类似的方式走过一段距离.他们把这件珍宝埋藏在两个强盗所在位置的连线的中点.若干年以后,这群强盗又回到岛上来挖掘他们所埋下的珍宝,但是他们发现那棵棕榈树已不存在了.船上有一个学过初等解析几何的仆人,指出了珍宝所在的位置,试问他是怎样做的?
- 20.9 在给定的三角形ABC的三个边BC,CA,AB 上取三个点D,E,F,使 得 BD/BC=CE/CA=AF/AB=1/3. 试证明:由三个线段AD,BE,CF所构成之三角形的面积,等于给定的三角形的面积的七分之一.
- 20.10 设长度一定的线段AB的端点A,B分别沿两条相互 垂直的直线移动,线段AB上的一点P分AB成固定的比例,试求

参考文献

BOYER, C. B., History of Analytic Geometry. New York: Scripta Mathematica, Yeshiva University, 1956.

COOLIDGE, J. L., A History of Geometrical Methods. New York: Oxford University Press, 1940.

MAHONEY, M. S., The Mathematical Career of Pierre de Fermat, 1601-1665. Princeton, N. J.: Princeton University Press. 1972.

SMITH. D. E., and MARCIA L. LATHAM, eds., The Geometry of René Descartes. New York: Dover, 1954.

部分习题的解法提示

- 1.3 这些名称是由从前用来表示数的一些姿势而产生的.
- 1.4 一个人和他的妻子睡在同一个垫子上,
- 1.6 (b) 利用——对应 $n \longleftrightarrow 2n$, 其中 n 是任何正整数.
- 1.7 这些性质可由集合的求和运算的交换性和结合性 直 接 推出.
- 1.8 设A, B, C 是任何三个集合,对应 $(a, b) \longleftrightarrow (b, a)$ $(a \in A, b \in B)$ 确立了交换性; 对 应 $(a, (b, c)) \longleftrightarrow ((a, b), c)$ $(a \in A, b \in B, c \in c)$ 确立了结合性,现在来证明 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$. 这时,如果 B 和 C 没有公共元素,a, β , γ 表示A, B, C 的基数,则 $A \times (B \cup C)$ 的基数是 $a(\beta + \gamma)$, $(A \times B) \cup (A \times C)$ 的基数是 $a\beta + a\gamma$.
- 1.9 如果A具有 n 个元素,则A具有2"个子集,因为在 构成 A 的子集时,对于 A 的 n 个元素中的每个元素都有两种选择,即包含这个元素或不包含这个元素。
 - 1.10 如果A含有m个元素,B含有n个元素,则 $A \cap B$ 含

有p个元素, $0 \le p \le \min(m, n)$, $A \cup B$ 含有q个元素, $\max(m, n) \le q \le m + n$.

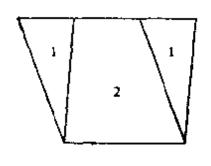
- 2.1 (b)这里s=r, c=2r.
- 2.1 (c)如果 r 是圆的半径, θ 是弦 c 所对圆心角之 半,则有 $r = (4s^2 + c^2)/8s$, $\theta = \sin^{-1}(c/2r)$, $A = r^2\theta c(r s)/2$.
- 2.3 如果 r 是圆的半 径,我 们 假 设 $6r/2\pi r = 57/60 + 36/3600 = 576/600$.
- 2.4 (a)设这个四边形为ABCD, 其中AB=a, BC=b, CD=c, DA=d. 这时

 $4k = ab \sin B + bc \sin C + cd \sin D + da \sin A$ $\leq ab + bc + cd + da = (a+c)(b+d).$

- 2.4 (b)在2.4(a)的公式中,设d=0.
- 2.5 取 $\pi = 3$. 这时,如果圆的半径为r,则 2r = 60/3 = 20. 弦e的矢s为 2. 于是 $e^2 = (2r)^2 (2r 2s)^3$.
 - 2.6 我们有 $\pi d^2 = 4s^2$.
 - 2.7 由 $1\sqrt{m} \sqrt{n} 1 \ge 0$ 出发.
- 2.8 在棱锥的平截头体T上加一个棱锥,使之成为一个完整的棱锥,把T的体积表示为整个棱锥与加上去的棱锥的体积之差.
- 3.2 在金字塔附近,竖直地立起一个长度为 s 的木杆. 设 S_1 , P_1 和 S_2 , P_2 是在一天中两个不同时刻木杆顶端和金字塔塔尖的荫影所在的位置. 这时,如果所求的金字塔的高度为 x,则 x = $s(P_1P_2)/(S_1S_2)$.
- 3.3 (a) 画一条通过三角形的一个顶点且平行于 对 边 的 直 **3**.3 (b) 3.3 (c) 3.3 (d) 3.3 (e) 3
 - 3.4 (g)把极限概念应用于3.4(f).
- 3.6 把三个顶点折向一个高的垂足,或者折向三角形的内心,有理由相信帕斯卡用的是后一种方法,

- 3.9 这个公式对于一切凸多面体都成立,更一般地,对于一切可连续变形为一个球的多面体都成立.
- 3.10 不能继续下去,不存在各面都是六边形的凸多面体。 事实上,可以证明:任何凸多面体都必须具有一个边数小于六的 面。
- 3.11 (b)设*D*是*P*的表面上这样一点,使得 距离 *CD* 为 极小、证明,*D*不能是*P*的顶点,也不能处于*P*的棱上,而 *CD* 是由 *C* 向 *P* 的包含 *D* 的那个面所引的垂线。
- 3.12 二者都不能给出 E. 求椭圆的周长涉及到第二类勒让 德椭圆积分,它不能用初等函数来表示.
 - 3.13 见美国数学月报, 1947, 8-9, 问题 E 753.
- 3.14 一般不交于一点,只是对于所谓正心四面体,四条高线才相交于一点,一个四面体,如果它的每一个棱都垂直于相对的梭,则称为正心四面体(orthocentric tetrahedra).

4.1 见图70



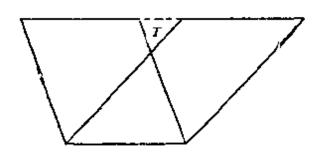


图 70



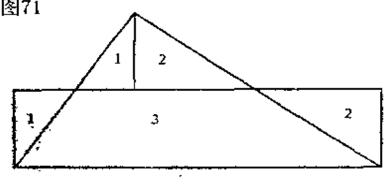


图 71

- 4.4 (b)注意。短直角边上的正方形未被分割。
- 4.5 (b)四个直角边分别为3和4的直角三角形,加上一个单位正方形,正好构成一个面积为25的正方形,由此可知,直角边分别为3和4的直角三角形的斜边是5.因为一个三角形由它的三个边来确定,所以3—4—5三角形是一个直角三角形.
- 4.7 (a)把这个直角四面体放在第一卦限,使直角的顶点与坐标原点重合,底面的三个顶点的坐标分别为A = (a, 0, 0), B = (0, b, 0). C = (0, 0, c). 这时,平面ABC的方程是 bcx + cay + abz = abc,

高 h 由下式给出:

$$h = abc/(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)^{1/2}$$
.

由此可知

$$1/h^2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)/a^2b^2c^2=1/a^2+1/b^2+1/c^2$$
.

4.7 (b)底面ABC的面积由下式给出:

$$ABC=3(直角四面体的体积)/h$$

= $abc/2h$.

由此可知

$$(ABC)^{2} = a^{2}b^{2}c^{2}/4h^{2}$$

$$= (a^{2}b^{2}c^{2}/4) (1/a^{2} + 1/b^{2} + 1/c^{2})$$

$$= (b^{2}c^{2} + c^{2}a^{2} + a^{2}b^{2})/4$$

$$= (OBC)^{2} + (OCA)^{2} + (OAB)^{2}.$$

4.8 圆AB'C与AB相切于A; 圆AC'B与AC相切于A,由 此可知

$$(AB)^2 = (BC)(BB'), (AC)^2 = (BC)(CC').$$

当 $\angle A = 90^{\circ}$ 时,B'和C'与由A所引的高的垂足重合・

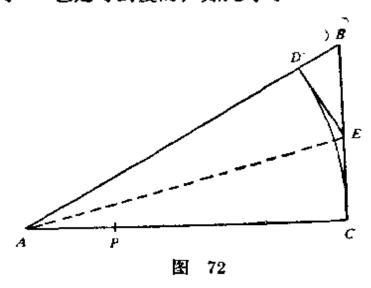
4.9 $\cos c = \cos a \cos b$.

4.10 如果在三个边分别为a, b, c的一个三角形中,我们有 $a^2+b^2=c^2$,则这个三角形是以c为斜边的一个直角三角形。

设 d 是两直角边分别为a,b的直角三角形的斜边,则 $d^2=a^2+$

 $b^2=c^2$,于是d=c. 由此可知,给定的三角形同这个直角三 角 形全等。

5.1 (b)(见图72)设AC和BC关于AP是可公度的,试证明: DE和DB关于AP也是可公度的,如此等等.



- 5.2 (a) 如果该直线通过坐标格点(p, q),那么我们就会有 $\sqrt{2} = q/p$,即一个有理数.
 - 5.3 假设 $\sqrt[3]{p} = a/b$, 其中 a 和 b 是互素的整数.
- 5.4 (a) 假设 $\log_{10}2 = p/q$, 其中 p 和 q 是整数, 那么我们必定有 $10^p = 2^q$, 这是不可能的.
 - 5.5 (a)假设这个和是一个有理数:
 - 5.5 (b)假设这个积是一个有理数.
 - 5.6 (a)在图73中,等腰三角形DAC和GDC是相似的。所以 AD:DG=DC:GC,

因此

DB:DG=DG:GB.

- 5.6 (b) AG:AH=AG:GB=AB:AG=AB-AG:AG-AH=GB:HG=AH:HG.
 - 5.6 (c) 设 a 和 b 表示给定的长方形的长度和宽度,这时 $\frac{a-b}{b} = \frac{a}{b} 1 = \frac{2}{\sqrt{5-1}} 1 = \dots = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

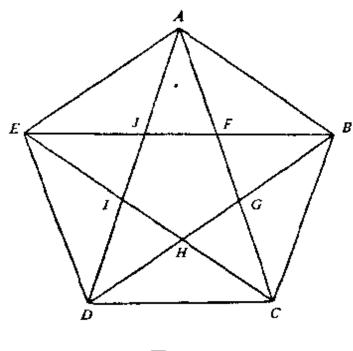


图 73

- 5.7 (a)设图73中的HG是给定的边、作直角三角 形 PQR,使直角边PR和QR分别等于HG和HG/2、在 PQ 的延长线上截取 QT = QR. 这时,PT = GB = GC = HC,等等.
- 5.7 (b)设图73中的DB是给定的对角线.作直角三角形PQ-R,使直角边PR和QR分别等于DB/2和DB. 在PQ上截取 PT=PR. 这时,TQ=DG=DC, 等等。
 - 5.7 (c) $360^{\circ}/15=24^{\circ}=2(72^{\circ}-60^{\circ})$.
- 5.7 (d)因为r和s是互素的,所以存在正整数p和q,使得 $pr-qs=\pm 1$. 所以,正s边形的p个边所对的圆心角与正r边形的q个边所对的圆心角之差为

$$p(360^{\circ}/s) - q(360^{\circ}/r) = (pr - qs)(360^{\circ}/rs)$$

= $\pm 360^{\circ}/rs$.

5.7 (e)设p, d, h是内接于单位圆的正五边形、正十边形和正六边形的边长.这时,h=1, $d=(\sqrt{5}-1)/2$.在腰长为1、底长为d的等腰三角形中,设t表示一个腰上的高,m表示底在这个腰上的投影,这时

$$m^2 = d^2 - t^2$$
, $t^2 = 1 - (1 - m)^2$,

由此,我们得到 $p^2=4t^2=4d^2-d^2$. 现在可以证明 $p^2=h^2+d^2$.

- 5.8 (a)在除法中,当用一个整数除另一个整数时,会得到一系列余数,如果遇到一个余数为零,则其小数表达式是有限的,否则,我们将得到一个非零余数的无穷序列,其中每一个余数都小于除数,因为在这样一些余数中只能有有限个是不同的,所以我们迟早总会得到以前已经出现过的一个余数,这样便形成循环小数表达式。
 - 5.8 (c)设x=3.239, y=0.39. 这时,10x=32+y, 1000 x=3239+y. 消去y, 我们得到990x=3207, 即x=3207/990.
 - 5.9 (a)这个表达式既不终断,又不循环.
 - 5.9 (b)这个表达式既不终断,又不循环.
 - 6.2 (a)利用下述事实:如果一组平行线同一条直线相交, 截出相等的线段,那么同另一条直线相交时也截出相等的线段.
 - 6.2 (b)设三角形为ABC,点M和N分别在 AB 和 AC 上,MN平行于边BC. 这时, $\triangle MNB = \triangle NMC$,因为它们具有公 共 边MN,且在MN上的高相等,利用在本讲中证明的定 理,我 们 有

 $AM: MB = \triangle ANM : \triangle MNB = \triangle AMN : \triangle NMC$ = AN: NC.

- 6.4 (a)否,条件(3)不成立.
- 6.4 (b)否,条件(2)不成立.
- 6.4 (c)否,条件(1)不成立.
- 6.4 (d)是.
- 6.4 (e)是.
- 6.5 利用归谬法.
- 6.6 (a)设 p_n 表示内接于圆的正n边形的周长,把圆的周长 c定义为 $\lim_{n\to\infty}p_n$.
- 6.6 (b)设 a_n 表示内接于圆的正n 边形的面积. 把圆的面积 A 定义为 $\lim_{n\to\infty}a_n$.

- 6.7 $\pi \pi \pi / 4$.
- 6.8 (a)设P为曲线上的一点,Q为曲线上与P相邻的一点. 把曲线上过点P的切线定义为当点Q沿曲线移动并趋向于P时割线PQ的极线位置(如果它存在的话).
- 6.8 (b)设o为曲面S上过给定点P的曲线,PT 为曲线 o的过点P的切线(如果它存在的话). 在曲面S于点P处足够光滑的条件下,可以证明: S上过点P的一切曲线的这样的切线都处在一个平面上. 这个平面就是S的过点P的切平面.
 - 7.4 管理员把折叠椅放好.
- 7.6 根据实质公理体系模式的部分 B 可知,公理是关于 基本术语的某些原始命题,而根据对于该学科的基本术语含义的解释,自然就会承认这些命题是正确的.
 - 7.7 利用下述事实:从四个事物中每次取两个的组合数为6.
 - 7.8 考察一切可能的情况,
- 7.9 先起头的人把第一支雪茄放在桌子的正中央, 然 后 模仿第二个人的放法, 放在相应的对称位置上.
- 7.10 B在与C的对局中模仿A的走法, B在与A的对局中模仿C的走法。
 - 8.1 选取2和3.
 - 8.4 (a)73.
 - 8.4 (b)29.
 - 8.4 (c)假设a>b. 这时, 欧几里得算法可以概括如下;

$$a = q_1b + r_1 \qquad 0 < r_1 < b$$

$$b = q_2r_1 + r_2 \qquad 0 < r_2 < r_1$$

$$r_1 = q_3r_2 + r_3 \qquad 0 < r_3 < r_2$$

$$\dots \qquad \dots$$

$$r_{n-2} = q_nr_{n-1} + r_n \qquad 0 < r_n = r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = q_{n+1}r_n$$

现在,由最后一步可知, r.能整除 r., 由倒数第二步可知,

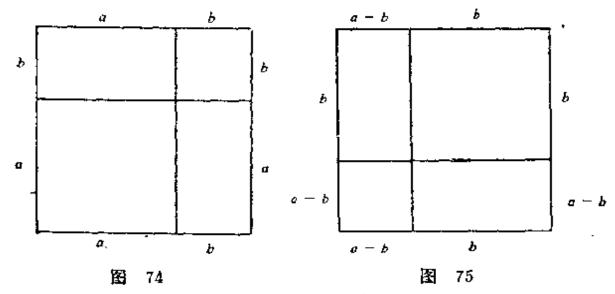
 r_* 能整除 r_{*-2} ,因为 r_* 能整除右端两项、类似地, r_* 能整除 r_{*-3} 。逐步向上推, r_* 能整除每一个 r_* ,最后可知 r_* 能整除 a 和 b.

另一方面,由第一步可知,a和 b的任何公因子c 都能整除 r_1 . 由第二步可知,c 能整除 r_2 . 逐步向下推,c 能整除每一个 r_3 . 因此,c 能整除 r_n .

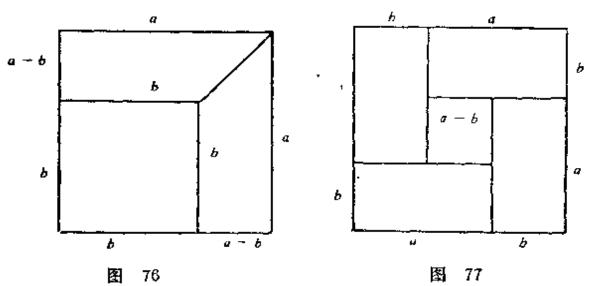
- 8.4 (d)由欧几里得算法的倒数第二步可知,我们能够把 r_n 表示为 r_{n-1} 和 r_{n-2} 的线性组合。再由倒数第三步可知,能够把 r_n 表示为 r_{n-2} 和 r_{n-3} 的线性组合,这样继续推上去,最后能把 r_n 表示为a和b的线性组合。
 - 8.4 (e) -7(7592) + 9(5913) = 73.
- 8.4 (f)当且仅当 a 和 b 的最大公因子为 1 时, a 和 b 是 互素的.
- 8.5 (a) 如果 p 不能整除u,则存在整数p和Q,使得 $P_p + Q_n = 1$,即 $P_{p_p} + Q_{n_p} = v$.
- 8.5 (b)假设对于整数n,存在两种素数分解方式,如果p是第一种分解中的一个素因子,那么,根据(a),它必定能够整除第二种分解中的一个因子,也就是说,它必定等于这些因子之
- 8.5 (c)注意: 273=(13)(21). 求整数 p 和 q, 使得13 p + 21q=1[见习题8.4(f)]. 除以273, 我们有p/21+q/13=1/273. 类似地, 求整数 r 和s, 使得1/21=r/3+s/7.
 - 8.6 (c)对于(b)中的每一个 b_i ,可取 $a_i + 1$ 个值.
- 8.6 (d)当且仅当a,均为偶数时 a 为完全平方数,当且仅当 (c)中的乘积为奇数时a,均为偶数.
- 8.6 (i)因为 b 能整除ac, 所以有 $b_i \leq a_i + c_i$. 又因为a 和 b 是互素的,所以 $a_i = 0$ 或 $b_i = 0$. 在两种情况下,均有 $b_i \leq c_i$.
- 8.6 (g)因为 a 能整除 c, 所以 $a_i \leq c_i$. 因为 b 能整除 c, 所以 $b_i \leq c_i$. 因为 a 和 b 是互素的,所以 $a_i = 0$ 或 $b_i = 0$.
 - 8.6 (h) 假设 $\sqrt{2} = a/b$, 其中 a 和 b 是正整 数. 于 是, 因

为 $a^2=2b^2$, 所以有 $(2a_1, 2a_2, \cdots)=(1+2b_1, 2b_2, \cdots)$, 因此 $2a_1=1+2b_1$, 这是不可能的.

- 8.7 欧几里得所说的圆, 指的是圆盘,
- 8.8 (b)设A是给定的点,BC 是给定的线段,根据I1,作等边三角形ABD.作圆B(C),设DB所在直线与这个圆相交于G.作圆D(G)与DA所在直线相交于L.这时,AL就是所求线段.
 - 8.9 (a)见图74.
 - 8.9 (b)见图75.



- 8.9 (c)见图76.
- 8.9 (d)见图77.



- 8.10 (a) 我们有 $(x-r)(x-s)=x^2-px+q^2$.
- 8.10 (h)设x和a-x表示这两部分. 这时, $x^2-(a-x)^2=x$ (a-x),即 $x^2+ax-a^2=0$.
- 9.1 (a) w_1 磅纯金沉入水中时减轻 w_1f/w 磅; w_2 磅纯银沉入水中时减轻 w_2f_2/w 磅,因此

$$w_1 f_1 / w + w_2 f_2 / w = f$$
.

- 9.1 (b) $f: f_1: f_2 = v: v_1: v_2$,
- 9.2 $(\pi r^2)(2r) = (3/2)V$, $(2\pi r)(2r) = (3/2)A$.
- 9.3 参考高中立体几何教科书.
- 9.4 如果生成弧所对之弦为a,则 $a^2 = (2r)(h)$.
- 9.5 (a) 球敏的体积等于一个球扇形的体积减去一个圆锥的体积,且 $a^2 = h(2r h)$.
- 9.5 (b)球台是立于其两底上的两球冠之差,设两球冠的高为 u 和 v, 这时

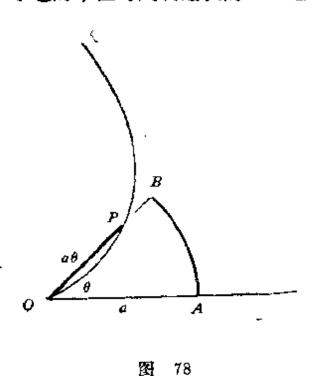
$$V = \pi r \left(u^2 - v^2\right) - \frac{\pi \left(u^3 - v^3\right)}{3}$$
$$= \pi h \left[(ru + rv) - \frac{u^2 + uv + v^2}{3} \right].$$

但是, $u^2 + uv + v^2 = h^2 + 3uv$,且有 $(2r - u)u = a^2$ 和 $(2r - v)v = b^2$. 所以

$$V = \pi h \left(\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{u^2 + v^2}{2} - \frac{h^2}{3} - uv \right)$$
$$= \pi h \left(\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{h^2}{2} + uv - \frac{h^2}{3} - uv \right)$$
 \(\frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2}.

- 9.6 (a)我们有(OM)(AO)=(OP)(AC),求和,我们得到(弓形的面积)(HK)=(△AFC)(KC/3).
- 9.6 (b) $\triangle AVC = (\triangle AWC)/2 = (\triangle AFC)/4$.
- 9.7 引CO,利用下述事实:三角形的一个外角等于其不相邻的两个内角之和.
 - 9.8 在图78中, OP=AB. 因此, 如果我 们 取 OP 垂直于

OA,则OP的长度等于圆的周长的四分之一,因为圆的面积K等于它的半径与周长之积的二分之一,所以我们有



K = (a/2)(4DP)= (2a)(OP),

因此,所求的正方形的一边为 2a和OP的比例中项,即 圆 的 直径和抛物线扇形的与 OA 垂 直的半径之长的比例中项。

9.9 设OB与螺线相交于 点 P, 点 P₁和 P₂把线段 OP 三 等分. 如果圆 O(P₁)和 O(P₂) 与螺线相交于 点 T₁和 T₂, 则 OT₁和 OT₂把角 AOB 三等分.

9.10 (a)延长CB到E, 使得BE=BA. 证明三角形

MBA和MBE是全等的.

- 10.3 (a)把等边三角形的一个边取作单位长,对于四边形 PACB应用托勒密定理.
- 10.3 (b)把正方形的一个边取作单位长,对于四边形*PBCD*和*PCDA*应用托勒密定理.
- 10.3 (c)把正五边形的一个边取作单位长,对于四边形 PCDE, PCDA和PBCD应用托勒密定理.
- 10.3 (d)把正六边形的一个边取作单位长,对于四边形PBCD, PEFA, PBCF和PCFA应用托勒密定理.
- 10.4 (a)见图79. 设D, E, F在同一直线 m上,由A, B, C引 m的垂线p, q, r. 这时,如果不计符号,则有

BD/DC=q/r, CE/EA=r/p, AF/FB=p/q. 现在,设所有的线段都是有向线段,则可得到

 $(BD/DC)(CE/EA)(AF/FB) = \pm 1.$

但是,因为m 必定与一个边或三个边交于三角形 之 外,所 以 可知,我们只能取负号.

反之,设

(BD/DC)(CE/EA)(AF/FB) = -1,

且EF与BC相交于D'. 因此,D'是一个门内劳斯点,且由 上 面的结果,有

(BD'/D'C)(CE/EA)(AF/FB) = -1.

由此可得,BD/DC = BD'/D'C,即D = D'.也就是说 D, E, F 在同一直线上。

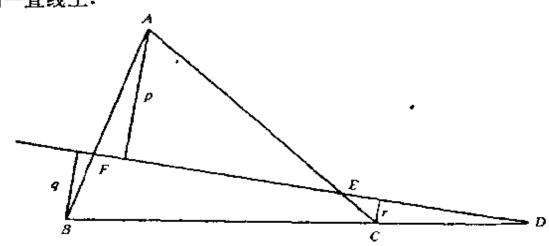


图 79

10.4 (b)设 h 表示由 O向直线 BC所引垂线的长度,读者可以检验,对于一切图形,有

$$\frac{BD}{DC} = \frac{hBD}{hBC} = \frac{2\triangle OBD}{2\triangle ODC}$$

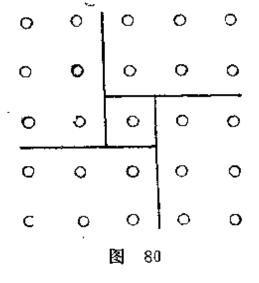
$$= \frac{(OB)(OD)\sin BOD}{(OD)(OC)\sin DOC} = \frac{OB\sin BOD}{OC\sin DOC}.$$

- 10.4 (c)利用10.4(b).
- 10.4 (d)在10.4(c)的图中,以O为心作球,与OA,OB,OC、OD,OE,OF相交于A',B',C',D',E',F'.
- 10.5 (a) 由高通过的顶点作外接圆的直径,利用相似三角形.

- 10.5 (b) 对于三角形DAB和DCB, 应用10.5(a).
- 10.5 (c) 利用10.5(b)的结果以及门内劳斯关系式 mn=ac+bd.
 - 10.5 (d) 这里 $\theta = 0^\circ$, $\cos \theta = 1$. 利用10.5(b)和10.5(c).
 - 10.5 (e) 利用10.5(a).
- 11.1 (b) 对于n=2, 我们得到毕达哥拉斯发现的一对亲和数220和284; 对于n=4, 我们得到费马发现的一对亲和数17296和18416.
 - 11.2 (a)证明2°b-1含有因子2°-1.
 - 11.2 (b)8128.
- 11.2 (c)如果a₁, a₂, …, a_n表示N的因数,则 N/a₁, N/a₂, …, N/a_n也表示N的因数.
 - 11.3 (a) p 的真因子之和是(p -1)/(p-1).
 - 11.4 (a) 1, 6, 15, 28.
 - 11.4 (b) $T_n = 1 + 2 + \dots + n$,

$$P_n = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2)$$
.

- 11.4 (c)利用11.4(b).
- 11.4 (d)长方形数的形式为a (a+1).
 - 11.4 (f)见图80.
 - 11.4 (g) 2^{n-1} $(2^n-1)=2^n$
- $(2^{n}-1)/2$. 利用11.4(b).
 - 11.4 (h) a=(m-2)/2, b=



(4-m)/2.

- 11.4 (i)a=5/2, b=-3/2.
- 11.5 (b) 如果p是合数,则p=ab,其中 $a \leq b$,因此 $a^2 \leq p$.
- 11.5 (c)对于 $n=10^9$, 我们有 $(A_n \log_{\bullet} n)/n=1.053\cdots$.
- 11.5 (d)考虑(n+1)!+2, (n+1)!+3, ···, (n+1)!+(n+1).

- 11.6 (a) $(2m)^2 \div (m^2-1)^2 = (m^2+1)^2$.
- 11.6 (b) 如果存在边长为整数的等腰直角三角形,则 $\sqrt{2}$ 是有理数.
- 11.6 (c)如果存在正整数a, b, $c(a \neq 1)$, 使得 $a^2 + b^2 = c^2$, $b^2 = ac$, 则a, b, c不能是互素的. 但是,如果存在一个毕达哥拉斯三数组,其中一个数是另外两个数的比例中项,则它们必定是这样一种基本毕达哥拉斯三数组.
- 11.6 (e)证明: 如果 $a^2+(a+1)^2=c^2$, 则 $(3a+2c+1)^2+(3a+2c+2)^2=(4a+3c+2)^2$.
 - 11.6 (i)利用II.6(e).
- 11.6 (g)如果n是奇数且大于 2,则 $(n, (n^2-1)/2, (n^2+1)/2)$ 是毕达哥拉斯三数组.如果n是偶数且大于 2,则 $(n, n^2/4-1)$ 是毕达哥拉斯三数组.
- 11.6 (h) 因为 $a^2 = (c b)(c + b)$,所以(b + c)是 a^2 的一个因子,因此, $b < a^2$ 和 $c < a^2$,这样的自然数 b 和 c 的组合,其 个 数是有限的.
 - 11.7 (a) 7, 4, 11, 9.
- 11.7 (b)设CD=3x, AC=4x, AD=5x, CB=3y. 这时, 因为AB/DB=AC/CD, 所以有AB=4(y-x). 根据毕达哥拉斯定理,推出7y=32x. 我们最后得到AB=100, AD=35, AC=28, BD=75, DC=21.
 - 11.7 (d) 1806.
- 11.8 (b)不难证明 $x = x_1 + mb$, $y = y_1 ma$ 是一组解. 反之, 假设 x 和 y 是一组解,则 $a(x x_1) = b(y_1 y)$,即 $x x_1 = mb$, $y_1 y = ma$.
 - 11.8 (c) 除以7,得到 x+2y+(2/7)y=29+6/7.

所以存在整数子,使得

(2/7)y+z=6/7,

$$2y + 7z = 6.$$

由观察法可以解出 $z_1=0$, $y_1=3$. 因此, $x_1=23$. 于是, 根据11.8 (b), 原方程的一般解是

$$x=23+16m$$
, $y=3-7m$.

因为根据要求,x>0,y>0,所以我们必定有m>-1和m<0.m可以取的值只有0和-1.于是,我们得到两个解

或者象在习题8.4(f)中那样,求出a和b,使得7a+16b=1。因此,我们可以取 $x_1=209a$, $y_1=209b$.

- 11.8 (d) 存在四组解: x=124, y=4; x=87, y=27; x=50, y=50; x=13, y=73.
- 11.8 (e)设 x 表示一角钱币的个数, y表示二角五分钱币的个数, 这时, 我们必须有

$$10x + 25y = 500$$
.

11.9 设 x 表示每堆大蕉的个数, y表示每人分得的大 蕉 的个数, 这时, 我们必须有

$$63x + 7 = 23y$$
.

x的最小整数解是5.

- 11.10 (a)设n=ab, 这时, 如果 $x^n+y^n=z^n$, 则有(x^a) $^b+$ (y^a) $^b=(z^a)^b$.
- 11.10 (b)假设点(a/b, c/d)处于曲线上,其中a, b, c, d 都是整数. 这时,(ad)"+(be)"=(bd)".
 - 11.10 (c) 考虑一个直角三角形,它的三个边由下式给出: a=2mn, $b=m^2-n^2$, $c=m^2+n^2$.

这个三角形的面积是

$$A = (ab)/2 = mn(m^2 - n^2)$$
.

取 $m=x^2$, $n=y^2$, 设 $x^4-y^4=z^2$, 我们得到

$$A = x^2 y^2 (x^4 - y^4) = x^2 y^2 z^2$$
.

所以,如果 $x^1+y^1=z^2$ 具有一组正整数解x, y, z, 则存在一个边长为整数的直角三角形,它的面积是平方数。

最后,如果 $x^4+y^4=z^4$,则 $z^4-y^4=(x^2)^2$.

- 12.1 1.120个苹果, 2.60岁, 3.2/5天, 4.144/37小时.
- 12.2 (b) 30.5minae的金,9.5minae的铜,14.5minae的锡,5.5minae的铁.
 - 12.3 84岁.
 - 12.4 (a) 27.
 - 12.4 (b)5,780 = $e' \psi \pi$.

72,803= $\zeta M\beta'\omega\gamma$.

450, 082 = μ M ϵ M $\pi\beta$.

3, 257, 888 = $\tau M \kappa M \epsilon M \zeta' \omega \pi \eta$.

- 12.5 (a) $\Delta^{\gamma} \Delta \beta \Delta^{\gamma} l \beta M \lambda \gamma \uparrow K^{\gamma} k \alpha \varsigma \zeta$.
- 12.5 (b) ya ka 3 bha ya 2 bha ka 2 bha ka 13 rū8.
- 12.6 (a) $Rq \mid Re \mid Rq \mid 68 \neq 2 \mid mRe \mid Rq \mid 68 \neq 2 \mid 1$.
- 12.6 (b) $\sqrt[3]{4+\sqrt{-11}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{-11}}$.
- 12.7 A cub B 3 in A quad + C plane 4 in A aequatur D solide 2.
- 13.1 MMMMCCCCLXVII, DCCCLXXXIX.
- 13.3 (b) (3660)₇.
- 13.3 (c) (1, 254, 626),.
- 13.4 (b) (43, 239)₁₁.
- 13.4 (c) (179, 578, 432)₁₂.
- 13.5 (a) (653)_a.
- 13.5 (b) 9, 8, 7.
- 13.5 (c)否. 是. 是. 否.
- 13.5 (d)我们必定有 $79=b^2+46+2$, 其中b=7.
- 13.5 (e)我们必定有 $72=2b^3+2b^2$,其中b=3.

13.6 (a) 设这三个数字为a, b, c, 我们有 49a+7b+c=81c+9b+a,

其中a, b, c小于7.

- 13.6 (b)我们必定有 $2b^2+1=t^2$, t和b是正整数,且b>3.
- 13.6 (c) $b^2 + 2b + 1 = (b+1)^2$.
- 13.6 (d) $(2b^2+2b+1)(2b^2-2b+1)=4b^4+1$.
- 13.7 (a)把w表示为二进制的数,
- 13.8 (a)设 t 为十位数字, u为个位数字, 按照题意, 我们有

$$2(5t+7)+u=(10t+u)+14$$

作为最后宣布的结果. 这时, 诀窍已经明显.

13.8 (b)设h, t, u表示百位数, 十位数和个位数. 按照题意, 我们有

 $5\{2[5(2h+3)+7+t]+3\}+u=100h+10t+u+235$,作为最后宣布的结果. 这时,诀窍已经明显。

- 13.8 (c) h=9-u, t=9.
- 14.3 在BA上取任意点D'. 然后,在CA上取E'',使得CE'' = BD'. 设圆 D'(B)与过E''的 BC的平行线相交于 E'. 过E'作 AC 的平行线,与BA相交于A',与BC相交于C'. 现在,我们得到一个与所求图形相似的图形,点 B 为相似中心
 - 14.4 (a)这里p=1, q=870.
 - 14.5 (b) 设x = 2y.
 - 14.5 (c)消去 x 和 y, 得到一个z的三次方程,
- 14.5 (d)取一个关于x的首项系数为1的三次方程,对它进行线性变换x=y+m.确定m,使所得到的y的三次方程不存在线性项,等等.
 - 14.6 求z, 使得 b/a=a/z, 然后求m, 使得c/z=a/m.
 - 14.7 (a)正根是2和4.
 - 14.7 (b)负根是-1.

14.8 (a)实根由直线 ay + bx + c = 0和三次曲线 $y = x^3$ 的交点的横坐标给出。

14.8 (b)
$$x=1.7+$$
.

14.8 (c)
$$x = -3.5$$
, 1, 2.5.

14.8 (e)
$$x=-6$$
, -2, -1.

15.1 (a) 我们对于四位数 N 来说明这个定理的证 明. 设 N 的千位数、百位数、十位数和个位数分别为a, b, c, d. 这个证明不难推测. 这时,

$$N = 1000a + 100b + 10c + d.$$

设S=a+b+c+d. 于是

N=999a+99b+9c+S=9(111a+11b+c)+S,继续下去。

15.1 (b)设M和N是任何两个数,其超出量分别为 e 和 f. 这时,存在整数 m 和 n,使得

$$M = 9m + e$$
, $N = 9n + f$.

于是有

$$M+N=9(m+n)+(e+f)$$

和

$$MN = 9(9mn + ne + mf) + ef,$$

继续下去.

15.2 (a)设M是给定的数, N 是由M的各位数字重新 排 列而得到的一个数. 这时,因为M和N 是由同样一些数字组成的,则它们具有相同的超出量e[由15.1(a)]. 因此,我们有

$$M = 9m + e$$
, $N = 9n + e$,

因而, M-N=9(m-n).

15.2 (b) 根据 15.2 (a),最后的乘积必定可被 9 整除,因此,根据15.1(a),这个乘积的各位数字之和的超出量必定为0.

15.3 利用相似三角形.

15.4 (a) x = 2.3696.

- 15.4 (b) x = 4.4934.
- 15.6 (a)利用数学归纳法. 假设当n=k时这个关系式成立, 那么

$$u_{k+2}u_{k} = (u_{k+1} + u_{k})u_{k}$$

$$= u_{k+1}u_{k} + u_{k}^{2}$$

$$= u_{k+1}u_{k} + u_{k+1}u_{k-1} - (-1)^{2}$$

$$= u_{k+1}(u_{k} + u_{k-1}) + (-1)^{k+1}$$

$$= u_{k+1}^{2} + (-1)^{k+1},$$

继续下去,或者利用15.6(b)中给出的u,的表达式,

15.6 (b)
$$\partial v_n = [(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n]/2^n \sqrt{5}$$
.

证明 $v_n+v_{n+1}=v_{n+2}$, $v_1=v_2=1$. 因此, $v_n=u_n$.

- 15.6 (c)用15.6(b)中给出的 u_n 和 u_{n+1} 的表达式来代替 u_n 和 u_{n+1} ,把分子和分母同除以 $(1+\sqrt{5})^n$,求当n→∞时的极限.
 - 15.6 (d)利用15.6(a)中给出的关系式,
 - 15.7 (a) A有121/17个银币, B有167/17个银币.
 - 15.7 (b)33天.
- 15.8 设 x 表示此人财产的数值,y表示每个儿子得到的数量、长子得到1+(x-1)/7,次子得到

$$2+\frac{x-\left(1+\frac{x-1}{7}\right)-2}{7}$$
.

令二者相等,求出x=36,y=6,儿子的数目是36/6=6.

15.10 382个苹果.

16.1 (b)
$$H = (3ac - b^2)/9a^2$$
, $G = (2b^3 - 9abc + 27a^2d)/27a^3$.

16.3 x=4. 另两个根是虚数.

16.4 我们求出(见正文)
$$a=6/b$$
, $c=b^3/6$, 因此 $6/b+b+b^3/6=10$,

築築.

$$16.5 \quad y^3 + 15y^2 + 36y = 450.$$

16.6 这里
$$\sqrt{(n/2)^2 + (m/3)^3} = \sqrt{-2700} = 30\sqrt{-3}$$
.

16.7 我们得到

$$16x^2 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2$$
, 因此, $x^2 + x + 1 = \pm 4x$.

由此求出 $x=(3\pm\sqrt{5})/2$, $(-5\pm\sqrt{21})/2$.

16.8 我们求得?=3(或-7), 因此x=4.

另两个根是 $-2\pm 5\sqrt{-3}$.

16.9
$$y^6 - 6y^4 - 144y^2 = 2736$$
.

16.10 (a)我们录出

$$m+h-k^2=b$$
, $k(m-h)=c$, $hm=d$.

由前两个关系式,得到

$$2m = (k^3 + bk + c)/k$$
, $2h = (k^3 + bk - c)/k$.

代入第三个关系式,得到

$$(k^3+bk+c)(k^3+bk-c)=4dk^2$$

即

$$k^6+2bk^4+(b^2-4d)k^2-c^2=0$$
,

这是关于49的三次方程。

16.10 (b)对于四次方程

$$x^4-2x^2+8x-3=0$$
,

关于产的相应的三次方程是

$$k^6 - 4k^4 + 16k^2 - 64$$
.

它的一个根是 $k^2=4$. 因此,k=2. 于是,我们得到

$$m = (k^3 + bk + c)/2k = 3$$
, $h = (k^3 + bk - c)/2k = -1$,

和

$$x^4-2x^2+8x-3=(x^2+2x-1)(x^2-2x+3)$$
.

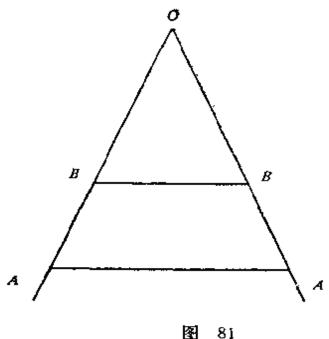
由此得到原四次方程的四个根是

$$-1\pm\sqrt{2}$$
11 $\pm\sqrt{-2}$.

17.1 (a)设 $\log_b mn = p$, $\log_b m = q$, $\log_b n = r$.这时, $b^p = mn$, $b^q = m$, $b^r = n$. 由此推出 $b^p = mn = b^q b^r = b^{q+r}$, 因此p = q

 $+\tau$.

- 17.2 (a)设 $y = \log_a N$, $z = \log_b N$, $w = \log_b a$.这时, $a^y = N$, $b^z = N$, $b^w = a$. 所以 $b = a^{1/w}$, 或 $b^z = a^{2/w} = a^y$. 因此y = z/w.
- 17.2 (b) 设 $y = \log_b N$, $z = \log_N b$. 这时, $b^y = N$, $N^z = b$, 因此 $n = b^{1/z} = b^y$. 因此,y = 1/z.
- 17.2 (c) 设 $y = \log_N b$, $z = \log_{NN}(1/b)$, 这 时, $N^y = b$. $(1/N)^x = 1/b$, 因此 $N = b^{1/z} = b^{1/y}$. 因此y = z.
 - 17.3 (a) $\log 4.26 = 1/2 + 1/8 + 1/256 + \cdots$ = 0.6294...
 - 17.4 (b) $\cos c = \cos a \cos b$.
 - 17.5 (a) $A=122^{\circ}39'$, $C=83^{\circ}5'$, $b=109^{\circ}22'$.
 - 17.5 (b) $A = 105^{\circ}36'$, $B = 44^{\circ}0'$, $c = 78^{\circ}46'$.
 - 17.6 (a) 制冰砖用的木条或压舌板均可作为做标尺的材料
- 17.6 (b)例如,为了把589475除以1615,取头上 标 有 1,6, 1,5的四个木条,并排放在一起,如图58所示,然后利用这些标尺,依次算出除法运算的部分商,
- 17.7 (b)参考习题17.1(a)和17.1(b)中所表示的对数 运 算 法则.
- 17.8 把 A 尺放在 D 尺的正上方,参考习题 17.1(d)(取 S = 2)中表示的对数运算法则.
- 17.9 做长度正好是D尺三分之一的对数刻度尺,把三个这样的短对数尺首尾相接,称之为K尺。把K尺放在 D尺的 正上方,参考习题17.1(d)(取s=3)中表示的对数运算法则.
 - 18.1 (a)加速度是单位时间中速度的增量.
- 18.2 (a)张开两脚规,使给定的线段(或它的若干分之一) AA'处于两臂上标有100的两点之间(见图81),这时标有20的两点之间的距离就是AA'的五分之一.
 - 18.2 (b)张开两脚规,使图81中的AA'/OA等于给定的比



奓

例,这时BB'就是与原来的长度OB对应的新的长度。

18.3 (b)张开两脚规, 使标有 106 的两点之间的距离等于 150. 这时, 标有100的两点之间的距离就表示一年前的资本, 把 这个运算过程重复五次, 就得到所求的量,

- 18.4 小球不但滚动而且滑动,
- 18.5 利用——对应 $n \longleftrightarrow n^2$.
- 18.6 (a)在近日点.
- 18.6 (c)1000年.
- 18.6 (d) 25A. U.
- 18.7 (a) 周期相同.
- 18.7 (b) 1 小时24分.
- 18.8 (a)在正n边形每个顶点上的内角为

$$(n-2)180^{\circ}/n$$
.

如果每一个顶点为 p 个正 n 边形所共有,则

$$p(n-2)180^{\circ}/n=360^{\circ}$$
,

即 p=2+4/(n-2).

18.8 (b)这里p(n-2)180°/n=180°, 即p=1+2/(n-2).

- 18.10 (c)由圆 $x^2+y^2=a^2$,经过下述变换 可 以 得 到 椭 圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$,在这个变换下,每一点上椭圆的纵坐标等于同一点上圆的纵坐标。
- 19.1 设P和P'是满足卡瓦列利第一原理的两个平片.设与两平行线之一距离 x 处的P 的弦长为f(x),则相应的 P'的 弦长为kf(x),其中 k 是某一比例常数.如果用A和A'表示P 和 P'的面积,则有

$$A = \int_0^{\pi} f(x) dx \quad \text{fit } A' = \int_0^{\pi} k(x) dx,$$

其中 h 为两平行线之间的距离。因此,A'=kA.

19.3 用通过圆柱轴线的平面 p 把蹄形尖劈分成相等的两部分,设A 是所得蹄形尖劈截面的面积,作一直棱柱,其一底为处于 p 上、面积等于 A 的正方形,其高等于圆柱的半径,从这个棱柱截出一个棱锥,其底为棱柱的不处于 p 上的底,顶点为棱柱的另一底上的一点,这个棱锥可以作为与半个蹄形尖劈进行比较的立体。

我们也可以选取这样一个立体作为半个蹄形尖劈 的 比 较 立体, 其下底为直角边分别等于 r 和h的直角三角形, 高等于r, 上底为一线段, 这个线段与下底的斜边平行且相等.

- 19.5 设AB和CD为空间中的两个线段,使得: (1) AB = CD = $2r\sqrt{\pi}$, (2) AB和CD都垂直于它们的中点的连线, (3)连接它们中点的线段的长度为2r, (4) AB垂直于CD. 四面体 ABCD 可以作为比较多面体.
- 19.6 把圆环放在垂直于它的轴线的平面 ρ 上.取一个半径 为r、高为2πc的直圆柱作为比较立体,把它横放在平面ρ 上.用 一个与ρ平行的平面截圆环和圆柱.圆环上的截面 A 是一个环形 区域,设其外径和内径分别为 a 和 b;圆柱上的 截 面 为 一长 方形,其长为2πc,设其宽为ω.这时,有

$$A = \pi a^2 - \pi b^2 = \pi (a^2 - b^2) = \pi (a + b) (a - b)$$

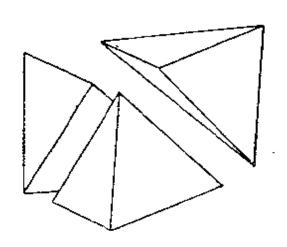
$$=2\pi c(a-b)$$

和

$$A' = 2\pi c w = 2\pi c (a-b)$$

因为A=A', 所以可知圆环的体积等于圆柱的体积。也就是说, $V=\pi r^2(2\pi c)=2\pi^2 r^2 c$.

19.7 见图82



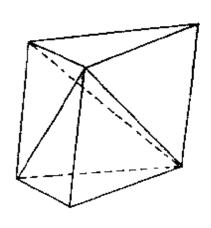


图 82

19.8 (b)因为平行于底面的截面面积是与一个底面的 距 离的二次函数,所以它的面积等于一个棱柱的固定截面面积、一个尖劈的截面面积(它同与底面的距离成正比)和一个棱锥的截面面积之和,然后,利用(a).

19.8 (c)设
$$A(x) = ax^2 + bx + c$$
. 试证明

$$V = \int_0^h A(x) dx = h[A(0) + 4A(h/2) + A(h)]/6.$$

19.9 (b)椭球

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$$

被与xy平面的距离为z的平面所截,其截面为椭圆

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 - z^2/c^2$$
,

两个半轴为

$$(a/c)\sqrt{c^2-z^2}$$
 $\pi(b/c)\sqrt{c^2-z^2}$.

这个椭圆的面积是

 $\pi a_b (c^2 - z^2)/c^2$,

这就证明椭球是推广的平截头锥体, 我们得到

 $V = 4\pi abc/3$.

19.10 不相等. 考虑两个四棱柱P和P', 它们的高相同, 横截面为同样的正方形, P为直棱柱, P'为斜棱柱, 但有两个侧面垂直于底.

这个习题告诉我们,直观有时可能会导致错误.我们可能会认为P和P'的侧面都是由一些方框组成的(即P和P'的横截 面的周线),因为这些方框具有同样的长度,而P和P'具有同样 多的方框,所以我们可能会得出这样的结论:P的侧面面积等于P'的侧面面积.

- 20.1 (a)通过正交投影使椭圆交换为圆、椭圆内面积 最大的三角形对应于圆内面积最大的三角形.但是,使得内接于圆的三角形具有最大面积的必要和充分条件是:这个三角形为等边三角形,而使得内接于圆的三角形为等边三角形的必要和充分条件是:它的重心与圆的中心相重合.
- (b) 通过正交投影使椭圆变换为圆, 椭圆内变动的弦对应于圆内变动的弦; 而后者与圆构成面积相等的圆弓形, 其包络是一个同心圆.
 - 20.4 利用中点公式和距离公式:
- 20.5 把给定的直角三角形放在笛卡儿直角坐标系中,使两直角边与两轴的正方向相重合。
- 20.6 可以把这个三角形放在笛卡儿直角坐标系中,使它的底边与 x 轴重合,使它所对的顶点落在 y 轴的正方向上。
 - 20.7 成立.
- 20.8 把两块石头之间的连线取作为笛卡儿直角坐标系的 x 轴,把两块石头连线的中点取为原点。
 - 20.9 取笛卡儿斜角坐标, 使 A, B, C的坐标分别为(0,

0), (3, 0), (0, 3).

20.10 把A所在的直线取作笛卡儿直角坐标系的y轴,把B所在的直线取作x轴.如果 AP=a,PB=b,则点P的轨迹 是 椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$. (这就给出当已知两半轴时,利用椭圆规绘制椭圆的原理. 绘图员通过调整相应的尺度,便可画出形状和大小不同的椭圆.)

第二部分 1650年以后

第 21 讲

无序中的有序

在脚的复杂的骨骼结构中有一块骨头正好倾斜地 在 髁 骨 之上,叫做距骨.对于人和具有发达下肢的动物来说,距骨是很不规则的,但是对于像绵羊、山羊、各种鹿那样的有蹄类动物,距骨具有近似于立方体那样大致的对称性,它的横断面两端都呈圆形,一端稍稍凸出,一端稍稍凹进.这些骨头是实心的,基本上没有骨髓,坚硬而耐磨,像一个立方体,每边的边长大约为1英寸或不到1英寸,可以擦得非常光亮.

考古学家们在史前遗址挖掘中,经常可以发现一大堆有蹄小动物的距骨和各种颜色的小石子.有理由可以猜想,这些骨头和石子可能是史前人类用做计数的筹子,也可能是他们自己和孩子们的玩具,虽然关于距骨在史前时期的这些用途仅仅是个猜测,但是在古代巴比伦、埃及和公元前的希腊、罗马时期距骨的用途之一是作为孩子们的玩具,是没有疑问的.我们现在得知,小学生们到处都玩距骨:他们将四个距骨平放在手指关节上,然后用手往空中一抛,当它们落下的时候,再努力去抓住它们.从希腊的瓶饰画中也可看到,距骨常被扔进在地上画的一个圈内.这很有点像现在的孩子们玩弹子游戏.究竟是大人们借用了孩子的玩具,还是孩子们模仿大人,这都很难说.但是在埃及第一王朝(约公元前3500年)以前距骨已经用于各种游戏,其中有一种游戏是用人做棋子,人在棋盘上移动步子是由抛掷距骨的下落情况来

决定的,有一幅埃及的墓穴画,画了一个贵族死后把一个玩的棋盘放置在面前,一块距骨在抛掷前被巧妙地平衡在他 的 手 指 尖上,今天在法国和意大利的孩子们仍然用距骨来做游戏,在乡村的一些店铺里能够买到用金属做的距骨,

但这里不是讨论游戏的历史和赌博起源的地方,赌博是不是 从游戏中发展起来的?还是从打赌、抓阄或求签、问卜中产生的 呢?不管怎么说,大概在公元前1200年一种立方形的刻有标记的 骰子已经逐渐产生了,它比距骨更适宜于在游戏中作为随机的工 具,这种观念的形成在全世界不同的地方几乎是同时发生的,而 且十分可能,第一个原始的骰子就是通过将距骨的两个相对的圆 面磨平做成的,这时候骰子的各个面已用某些圆的雕刻工具钻了 一些浅的小凹坑做成不同的标记,

当"人棋"游戏只用骰子而不用棋盘和棋子时,很自然地产生了赌博。这时游戏者所关心的是,掷两颗或更多颗骰子得到一定点数的机会或概率。因此,尽管古代希腊哲学家们相当详细地讨论了必然性和偶然性,但是我们说概率的研究最初都是为了估计出现在某种赌博游戏,特别是掷骰子游戏中的机会,大概是不会错的。

研究概率的历史学家也很难说清,为什么这个学科的概念发展得如此缓慢.当然,关于掷骰子的等可能性观念的形成是必然要在"最诚实的"(即最规则的)骰子制作出来之后.只要人们还是用距骨或者直接用木块、象牙、石头磨光了并刻上适当的标记来制作骰子,供游戏或占卜之用,那么落下不同的面的规律性就不可能被人们掌握.此外,计算经验概率需要长时间的试验,那时候也没有人能保存那么多计数的筹码.因此人们一直天经地义地认为,骰子或距骨的下落完全是由上帝的怪念头来决定的.

我们知道,罗马皇帝及其周围的悠闲的大臣们都爱好赌博。据说,例如克劳迪乌斯(Claudius,公元前10年—公元54年)就非常迷恋于掷骰子,甚至他还写过一本题为《怎样在掷骰子中取胜》

的书,可惜这本书没有被保存下来。但是真正开始认真分析随机 事件还是在文艺复兴时期之后,那时人们书写和计数的能力有了 普遍的提高,简易的代数也已发展起来.

比较恰当的说法是,在15世纪后期和16世纪初期对概率还没 有真正的数学论述、当时有一些意大利数学家试图对象掷骰子这 样的赌博游戏中出现的机会进行估计,如在本书第16讲中将会谈 到G. 卡尔达诺(Cardano, 1501—1576)写了一本赌博便览,书中 包含了数学概率比较简单的一些方面,但是一般都认为,概率科 学的起源还是从一个所谓的点数问题 (Problem of the Points)开 始的. 这个著名的问题是这样的: 两个技巧相当的赌徒对局, 他 们知道怎样的比分赌局终止,也知道取胜所要求的点数,问应该 怎样来分配他们的睹注. F. L. 帕乔利 (Pacioli, 1445-1509) 在他的著名的《要义》(Sīma)*(1494年)一书中,第一次把点数问 题写入数学著作中来, 卡尔达诺和塔 尔 塔 利 亚 (Tartaglia, 约 1499-1557) 继续讨论这个问题, 但他们的答案都是错的, 直至 1654年以前这个问题没有多大进展, 1654年一个能干而有经验的 赌博者C. 默勒 (Méré) 向帕斯卡提出了这个问题, 因为根据 他 对此问题的理论推断往往同实际的观察不符合。帕期卡对此问题 极有兴趣,他写信同费马讨论.于是在两位法国大数学家之间展 开了非同寻常的通信10. 在通信中他们各自独立而正确地解决了 这个问题. 也就是说,帕斯卡和费马在他们1654年的通信中共同 奠定了概率论的基础,这又是数学史上的一个里程碑,

B. 帕斯卡(Pascal)1623年生于法国的奥弗涅(Auvergne)省,很早就表现出非凡的才能. 在12岁时他就完全独立地发现了许多初等平面几何的定理. 14岁他参加了一个数学小组每周一次的非正式例会,这个小组在1666年终于发展成法国科学院. 16岁时他

^{*} 其完全的标题是《算术,几何,比例和比值要义》(Summa de arithmetila, geometria, proportioni e proportionalita).

¹⁾ D. E. Smith, A Source Book in Mathematics.

发现了他的丰富多采的"神秘的六线形"定理,这是射影几何中的一个定理,断言内接圆锥曲线任意六边形三对对边的三个交点共线,几年后他发明和制造了第一台计算机,并开始致力于物理学和机械学的研究,1648年他写出了内容全面的射影几何学的论著,但都已失传。

这些令人惊叹的、早熟的活动在1650年突然停止了。这时候帕斯卡体弱多病,他放弃了在数学和科学上的工作而献身于宗教的沉思。三年以后,他又短暂地回到数学中。这时期他写了《三角阵算术》(Traité du triangle arithmétique)一书。我们不久就将看到,这篇论文在本讲要讨论的问题中起着重要作用。他作了大量关于流体压力的实验,发明了液压机。在1654年他同费马进行了历史上有名的通信,奠定了概率的数学理论的基础。

接着,在1654年后期帕斯卡承认,他感到有一种强有力的暗示:他重新从事数学和科学活动得罪了上帝,神的启示终于出现了,一次他的失去控制的马越过了大桥的高护墙冲向死亡之时,只因最后一分钟缰绳折断,他才奇迹般地活了下来,这一偶然事件加强了他精神上的信念,他把这事记在一张小羊皮纸上,从此他又坚定地回到他的宗教沉思中去,

到1658年,帕斯卡又回到数学中来,这时候他患牙痛病,每当他心中想起一些几何问题时,牙就立刻不痛了,帕斯卡把这也解释为神意,他拼命地工作了8天,展开了他的思想,终于对旋轮线几何作了一个非常完备的总结,

帕斯卡的名作《外地短扎》(Provencial Letters)和《思绪》(Pensées) 都谈到了一些宗教的事情,今天读来还觉得好像是早期的法国文学作品的典范。这两部著作都是他即将离开人世前不久写成的。1662年他久病不起,悲惨地死于巴黎,那时他才39岁。

帕斯卡也许本来能成为数学史上最伟大的数学家,他具有如此非凡的天才和如此敏锐的几何直觉,本应该有大得多的贡献,不幸的是,他在一生的大部分时间中身体为剧烈的神经痛所折磨,

精神又为宗教所困扰.

同帕斯卡的痛苦、困扰、短暂的一生相比,P. 费马(Pierre de Fermat)的一生就相当幸福、平静、长寿的了,而且费马也不像帕斯卡那样时断时续地工作,而是几乎持续不断地有所创造、费马 1601、(?) 年生于图卢兹 (Toulouse)附近的博蒙德 洛芒 (Beaumont de Lomagne),父亲是皮革商人,家庭经济富裕,他同帕斯卡一样是在家中接受早期教育的。

1631年,费马被任命为图卢兹申请委员会的委员,1648年又被提升为图卢兹地方议会的王室法律顾问。他以这一身分,谦虚谨慎、循规蹈矩地度过了他的后半生。他尽心负责、恭顺谦让做好他律师的本职工作,还将大量的业余时间用于研究数学。他生前没有发表什么著作,但他同当时一些大数学家的科学通信对他同时代的人影响极大。

费马以如此众多的重要工作丰富了如此众多数学分支领域,已使他不愧为17世纪最伟大的法国数学家.在上一讲中,我们已经看到,他独立地发明了解析几何,在这一讲中,我们将看到,他如何促成了概率论的奠基工作;而在下一讲中,我们还将看到,他对早期微积分的发展作了卓越的贡献.但在他所有这些对数学的贡献中,尤其突出的是,为现代数论奠定了基础.在这一领域中他具有非凡的直觉和令人敬畏的才能.他是古今第一流的数论大师.

费马1665年非常突然地死于卡斯特尔 (Castres) (也有可能在图卢兹). 他的墓碑最早存放在图卢兹的奥古斯了教堂,后来移至地方博物馆.

现在我们再回到点数问题.对这个问题,在1654年帕斯卡同费马的通信中已作了严格的数学讨论,并获得了解决.两位数学家的讨论可用例子来说明:在两个技巧相当的赌徒 A和 B 之间进行赌博. A 在 2 点或大于 2 点时取胜,而 B 在 3 点或大于 3 点时取胜,问应该如何来分配赌注.我们先来看费马对这个问题的解,

它是两种解法中比较简单和比较直接的解法。而帕斯卡的解法则可能比较精致和便于推广。

在这个例子中很显然,四次或四次以上的预赛就 能 决 定 胜 负. 费马用a表示A取胜的预赛,用b表示 B 取胜的预赛,然后考 虑a,b两种字母每次取四个的16种可能的排列。

aaaa	aaab	abba	bbab
baaa	bbaa	abab	baba
abaa	baba	aabb	abbb
aaba	baab	bbba	<i>bbbb</i>

其中,a出现 2次或多于 2次的情况是有利于 A,这种情况 共 11种,而b出现 3次或多于 3次的情况是有 利于 B,这 种情况 共 5 种。因此,赌注应按11:5之比来分配。推广至一般情形,如果 A 要在m点取胜,B 要在n点取胜,则两种字母a,b 每次取 m+n-1个的可能的排列为 a^{m+n-1} 种。这样就可求出,a出现m次或多于m次的情况为a种和b出现m次或多于m次的情况为a种和b出现m次或多于m次的情况为a种和b出现m次或多于m次的情况为a种和b出现m次或多于m次的情况为a种和b出现m次或多

帕斯卡解这个问题是利用了他的"算术三角形",所谓算术三角形就是他在《三角阵算术》的论文中讨论的一种数阵,这篇论文虽然写于1653年,但直至1665年才发表,这种算术三角形如图1所示,数阵中从第二行起任何元素都是由上一行这个元素正上面的元素加上这个元素左面的元素而得到的,例如在第四行中35=15+10+6+3+1.

任意阶三角形都可通过画一对角线得到(见图 1). 学过高中代数¹⁾ 的学生大概都能认出,沿着对角线的数恰好是二项式展开中逐项的系数. 例如,沿着第五条对角线的数,即1,4,6,4,1是(a+b)[†]展开式中逐项的系数. 寻求二项式系数 也是帕斯卡三角形的用途之一. 帕斯卡还用它来求出从几件物品中一次取 r 件的组合数,他正确地表述为

¹⁾ 此处原文是College algebra.——译者注.

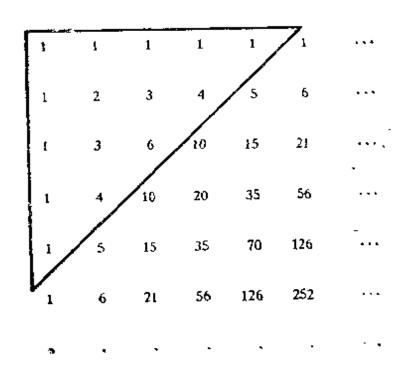


图 1

$$C(n, r) = n! / r! (n-r)!$$
.

式中n! 是我们现代用的符号1, 表示乘积

$$n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$$
.

人们容易看出,沿着第五条对角线的元素分别为:

$$C(4, 4) = 1$$
, $C(4, 3) = 4$, $C(4, 2) = 6$, $C(4, 1) = 4$, $C(4, 0) = 1$.

因为C(4, 4)是a出现四次的方法数,C(4, 3)是 a 出现三次的方法数,等等,所以上述点数问题的解就是

$$[C(4, 4)+C(4, 3)+C(4, 2)]:[C(4, 1)+C(4, 0)]$$

= $(1+4+6):(4+1)=11:5.$

在一般情况下,如果A需要m点取胜,B需要n点取胜,那么就可选择第m+n条帕斯卡算术阵的对角线,并求出这条对角线上前n个元素的和a与后m个元素的和 β 、赌注应按a: β 之比來分配.

¹⁾ 符号n₁ 叫做n的阶乘, 1808 年由斯特拉斯堡的 C. 克拉姆普 (Kramp, 1760—1826) 引人,他选用这一符号是为了避免过去的符号遇到的一些困难,为了方便,还定义 0₁ = 1.

有许多关系都涉及算术三角形的数,其中有些是由帕斯卡提出的.但帕斯卡并非研究算术三角形的第一人,因为这样的数阵比他早好几个世纪前就由中国和波斯学者研究过,也被帕斯卡的欧洲前辈们讨论过.但因为帕斯卡发展了三角形的许多性质,并且将这些性质作了许多应用,所以这个数阵以帕斯卡三角形的名称为世人所知.在帕斯卡关于此三角阵的论文中出现了数学归纳法的令人满意的最早的陈述.

帕斯卡和费马在他们1654年的具有历史意义的通信中还思考了与点数问题有关的一些其他问题,例如当赌博在多于两人或两个赌徒的技巧不同的情况下进行时,赌注的分配问题。帕斯卡和费马的这一工作开创了概率的数学理论,标志着数学史上一个里程碑。1657年荷兰伟大的天才C.惠更斯(Christian Huygens)在帕斯卡和费马通信的基础上写出了第一篇关于概率的正式论文,这是伯努利的《猜测术》以前关于这一学科的最好总结。《猜测术》是在J.伯努利(Jacob Bernoulli, 1654—1705)死后,1713年出版的。它的出版才遏制住了惠更斯早期论文的再版。在这些先驱者的杰出工作的基础上,我们看到,这一学科被A. 棣莫弗尔(1667—1754)、D.伯努利(1700—1782)、L.欧拉(1707—1783)、J. L. 拉格朗日(1736—1813)、P. S. 拉普拉斯(1749—1827)等一大群数学家继续向前推进。

想到数学家们已经能够发展一门学科,即概率的数学理论,能够建立起一些合理的法则应用于纯属机会的情形,实在是令人神往和惊奇的.这个学科也远非没有实用价值的.这已被大实验室所做的实验,具有高度信誉的保险公司的存在和庞大事业和战争的后勤工作所证实.关于概率的科学,法国杰出的数学家拉普拉斯曾说过,虽然它是从考虑某一低级的赌博开始,但它却已成为人类知识中最重要的领域.英国伟大的理论物理学家 J. C. 麦克斯韦(Maxwell, 1831—1879) 声称,它是"实践者"的数学. 而英国的逻辑学家和经济学家 W. S. 杰文斯(Jevons, 1835—

1882)则认为,它是"生活真正的领路人,如果没有对概率的某种估计,那么我们就寸步难移,无所作为".

习 题

- 21.1 两个技巧相同的赌徒 Λ 和 B 进行赌博,在下述情况下如何分配赌注?
- (a) A在1点或大于1点时取胜, B在4点或大于4点时取胜, 试用费马的枚举法。
- (b) A在3点或大于3点时取胜, B在4点或大于4点时取胜, 试用帕斯卡的三角阵法.
 - 21.2 试证明
 - (a) C(n, r) = n! / r! (n-r)!
 - (b) C(n, n-r) = C(n, r)
 - (c) C(n, r) = C(n-1, r) + C(n-1, r-1).
 - 21.3 试证
 - (a) 在(a+b)"的展开式中 $a^{n-1}b$ "的系数是C(n, r)
 - (b) $C(n, 0) + C(n, 1) + C(n, 2) + \cdots + C(n, n) = 2^n$.
- 21.4 证明由帕斯卡发展的、涉及算术三角形数 的 如 下 关 系:
- (a) 算术三角形的任意元素(不在第一行或第一列的)等于该元素正上方的元素与它左方的元素之和,
- (b) 算术三角形的任意元素减去 1 等于该元素以上各行和以 左各列元素的总和.
 - (c) 第n行的第m个元素是C(m+n-2, n-1).
 - (d) 第m行、第n列的元素等于第n行、第m列的元素。
 - (e) 任一对角线上元素之和是两倍于上一对角线元素之和.
 - (i) 第n条对角线元素之和等于2"-1.
 - (g) 试证算术三角形第n+1条对角线同第r+1列的相交元素

参考文献

BELL. E. T. Men of Mathematics. New York: Simon and Schuster. 1937.

DAVID. F. N., Games. Gods and Gambling. New York: Hafner. 1962.

SMITH. D. E., A Source Book in Mathematics. New York: Dover, 1958.

TODHUNTER.I., A History of the Mathematical Theory. of Probability from the Time of Puscal to that of Laplace. New York: Chelsea, 1949.

第 22 讲

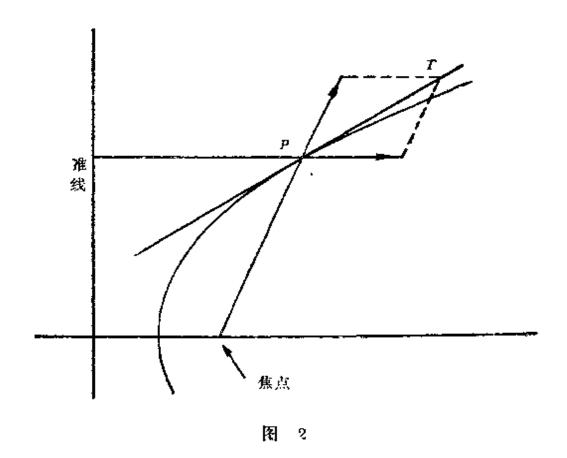
动画与静画

发明新的数学方法的最初刺激是来自一些用已有的方法难以解决的问题,其实,不断出现未解决的问题是维持数学的成长和健康的力量源泉,上一讲中我们看到这方面的例子,这就是那个难以捉摸的所谓点数问题,正是它导致了概率论的创建。

在更早的几讲中,我们已经看到,寻求某个面积、体积和弧长的问题引起了求和过程,导致积分学的产生,在这一讲中我们将看到,求作曲线的切线问题和求函数的极大值、极小值问题导致微分学的产生,每一次这样的创建工作在某种程度上都构成数学史上的一个里程碑,

有趣的是,积分学的起源可追溯到古希腊时代,但直至十七世纪我们还没有看到对激分学有什么重大的贡献,以前并不是没有求作曲线的切线的尝试,也不是没有求极大和极小值的考虑,例如,在古代希腊就能够作圆和圆锥曲线的切线,阿波洛尼乌斯

(Apollonius)在他的《圆锥曲线》(Conic Sections)一书中讨论过圆锥曲线的法线,把它当作从一个点至曲线的最大和最小线段.在古希腊的著作中可以找到其他对极大、极小的讨论.几个世纪以后,更一般地讨论求作曲线的切线的问题由G.P.de罗伯瓦尔(Roberval,1602—1675)再次提出.他竭力主张曲线是由运动的点生成的,而点的运动又可分解为两个已知的运动.两个已知运动的速度向量的合成向量就给出曲线的切线.例如,在抛物线的情形,我们可把离开焦点的运动和离开准线的运动当作两个已知运动.因为运动点至焦点和准线的距离总是彼此相等的,所以两个运动的速度向量在大小上也必须相等。由此可以得出结论,抛物线上某一点的切线是由焦点至该点的射线和通过该点的准线的垂线所组成的角的平分线(见图2).E. 托里拆利(Torricelli,1608—1647)也持有这种观点,所以后来在罗伯瓦尔和托里拆利



之间发生了发明优先权的争论,这个方法虽然看起来很漂亮,但

在实际应用上还是很受限制的:

另一个求作曲线切线的方法是由 R. 笛卡儿(Descartes) 在 他 1637年的《几何学》一书的第二部分给出的,虽然他把他的方法应 用到许多不同的曲线上,包括以他的名字命名的四次卵形线¹⁾上,但这种方法仍只能局限于代数曲线,而且即使这样还常常导致令人生畏的代数上的困难.

上述方法没有一个能应用于普遍情形,也没有一个包含了微分的方法.第一个真正对微分作出明确预言的,可追溯到费马1629年所陈述的思想,不过这些思想直至八、九年后才较多地为人所知.开普勒(Kepler)已经观察到,一个函数的增量通常在极大值或极小值附近变得无限地小.费马把这一事实变成求解这种极大值或极小值的方法.简单说来,他的方法如下:如果f(x)在x处有普通的极大值或极小值,并假设 e 是非常非常小,那么f(x+e)的值几乎就等于f(x)的值.因此我们暂时可先假定f(x+e)=f(x),然后让e等于零使等式还成立.消去e后的方程式的根就是使f(x)取极大值或极小值的x.

现在我们用费马考虑的第一个例子来解释这个方法。问题的提法是,将一个量分成两部分,使得它们的乘积最大。费马用了事达的记法:常量用大写辅音字母表示,变量用大写元音字母表示。采用这种记法,可假设 B 为给定量,而用 A 和 B - A 表示分成的两部分。作乘积

$$(A+E)[B-(A+E)],$$

并使它等于A(B-A),我们就有

$$A(B-A) = (A+E)(B-A-E)$$

或 $BE-2AE-E^2=0$.

用E除上式就可得到

$$B-2A-E=0$$
.

¹⁾ 笛卡儿卵形线是一个动点的轨迹,此动点至两个固定点的距离 r_1 和 r_2 满 足关系式 $r_1 + mr_2 = a$,式中m和a是常数,有心圆锥曲线是它的特殊情况。

现在再让E=0,我们就得到2A=B,也就是说,求得的解答是,两部分都为B的一半。

虽然费马解释的逻辑还有待改进,但他的方法已等价于假设

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0,$$

即假设 f(x)的导数等于零.这是寻求一个函数极大值或极小值的普通方法,往往在中学教科书中称作费马方法.但费马还是没有认识到,函数 f(x)的导数等于零只是普通极大值或极小值存在的必要条件而并非充分条件.此外,费马方法也不区分极大值和极小值.

费马还创造了在笛卡儿坐标系中方程已给出的曲线上某点求作切线的一般方法. 他想出先求该点的次切线, 所谓次切线 是 x 轴上两点之间的一个线段, 其中一个点是从该点引 x 轴的垂线所得到的垂足, 另一点是切线同 x 轴的交点. 这个方法利用了切线是当割线同曲线的两个交点趋于重合时割线的极限位置这一思想. 用现代的记法可表示如下: 设曲线(见图 3)的方程是 f(x+y)=0,我们要寻求曲线上一点(x,y)的次切线1. 通过相似三角形,我们很容易求得在切线上邻点的坐标为

$$\left[x+e, \ y\left(1+\frac{e}{t}\right)\right].$$

这个点暂时也可认为是在曲线上,这样就有.

$$f\left[x+e, \quad y\left(1+\frac{e}{t}\right)\right]=0.$$

这个等式在令 e 等于零时仍然成立. 然后, 我们解此方程, 以便用切点的坐标x和y来表示次切线t. 这就相当于假设

$$t = -y - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}},$$

这个一般公式是出现在稍后的1652年R.F.W. 斯卢兹 (Sluze)

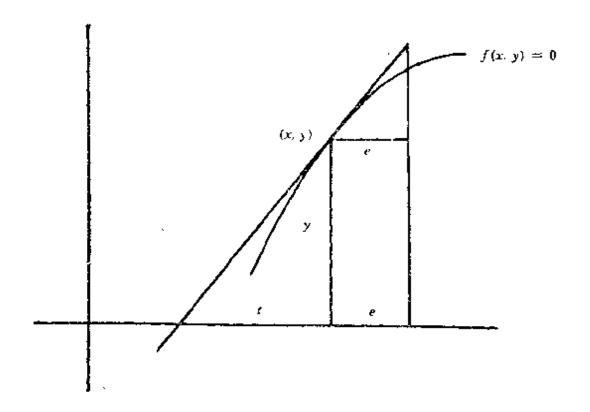


图 3

的著作中,他是一个大教堂教士会成员,写过不少关于数学的小册子,当然那时候还没有现代的记法,费马用他的方法求作了椭圆、旋轮线、蔓叶线、蚌线、割圆曲线、笛卡儿叶形线等的切线,现在用笛卡儿叶形线作为例子来说明这种求次切线的方法,设笛卡儿叶形线方程为

$$x^3 + y^3 = nxy$$
.

我们就有

$$(x+e)^3 + y^3 \left(1 + \frac{e}{t}\right)^3 - ny(x+e)\left(1 + \frac{e}{t}\right) = 0,$$

或

$$e\left(3x^{2} + \frac{3y^{3}}{t} - \frac{nxy}{t} - ny\right) + e^{2}\left(3x + \frac{3y^{3}}{t^{2}} - \frac{ny}{t}\right) + e^{3}\left(1 + \frac{y^{3}}{t^{3}}\right) = 0.$$

现在用 θ 除上式,然后再令 $\theta=0$,就得到

$$t = -\frac{3y^3 - nxy}{3x^2 - ny}.$$

另一个对微分作出预言的是I. 巴罗(Barrow). 巴罗1630 年生于伦敦,毕业于剑桥大学. 他是大学里的高级学术人才,在数学、物理、天文和神学方面都有造诣. 他也是当时研究希腊的著名学者. 他是第一个担任剑桥大学卢卡斯讲座教授职位的人. 为了支持他的大弟子 I. 牛顿,1669 年他心胸宽大地辞去了这个职务. 他也是最早发现和认识到牛顿的杰出才能的人之一. 1677年他逝世于剑桥.

巴罗最重要的数学著作是他的《光学和几何学讲义》,它是在他辞去了剑桥大学教授职务后发表的·文章的前言表示对牛顿致谢,因为他提供了书中某些材料,很可能是有关光学的部分·在这本书中我们能找到非常接近于近代微分过程的步骤,在本质上已用到了在我们今天教科书中所用的所谓微分三角形的概念·假定我们要寻求如图 4 所示曲线上一点 P 的切线·这时候 三角形 PTM和三角形PQR 是互相很接近于相似的,巴罗认为,当小三角形变得越来越小时,我们就有

$$RP/QR = MP/TM$$
.

令QR=e, $RP=a^{1)}$. 这时如果 P 的坐标为x=e和y=a. 将这些值代入曲线的方程,并让e和a的二次幂和高次幂等于零,我们就能得到a/e之比、于是我们有

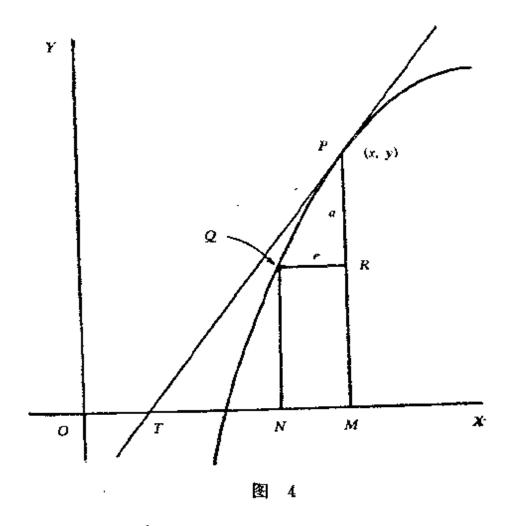
$$OT = OM - TM = OM - MP(QR/RP)$$

= $x - y(e/a)$,

切线也因此被确定, 巴罗用此方法求作了以下曲线的切线:

- (a) $x^2(x^2+y^2)=r^2y^2$ (卡帕曲线),
- (b) $x^3 + y^3 = r^3$ (拉梅特殊曲线),

¹⁾ 必须指出、a和 e 今天都已用 Δy 和 Δx 表示,因此,a/e 之比当 e 趋于零时 为 dy/dx。



- (c) x³+y³=rxy(笛卡儿叶形线),
- (d) $y = (r x) \tan(\pi x/2r)$ (割圆曲线),
- (e) $y = r \tan(\pi x/2\tau)$ (正切曲线).

作为例子,我们将此方法应用于曲线(b).这时我们有

$$(x-e)^3+(y-a)^3=r^3$$

或

$$x^3 - 3x^2e + 3xe^2 - e^3 + y^3 - 3y^2a + 3ya^2 - a^3 = r^3$$
.

让 a 和 e 的二次幂和高次幂等于零,并利用 $x^3+y^3=r^3$ 这一事 实,上式可简化为

$$3x^2e + 3y^2a = 0$$
,

由此我们得到

$$a/e = -x^2/y^2.$$

这个a/e自然就是我们今天的dy/dx,而巴罗的令人可疑的方法也可用极限理论变得严格起来。

费马、巴罗和其他一些他们同时代人的工作引出了微分的过程,并将它应用于解许多极大、极小问题和求作许多曲线的切线.在创建微分学的进程中究竟还有多少事情要做呢?还需要以一套系统的计算导数的形式分析法则来创立一般符号体系,以及为此学科重建逻辑上一致的、严格的基础。这第一个任务恰好就是牛顿和莱布尼茨各自独立创造的微积分学所完成的工作。至于要在一个比较严格的基础上重建这个学科的基本概念,则要等到这个学科取得了广泛应用和蓬勃发展之后,这是法国伟大的分析学家A. L. 柯西(Cauchy, 1789—1857)及其十九世纪追随者的工作,这也是数学史上的一个里程碑。这一故事要留到以后来讲。

第一个建立起一般的、确实可行的微分学的是德国伟大的数学家和哲学家G.W.莱布尼茨(Leibniz,1646—1716).在1684年的《博学学报》(Acta eruditorum)"杂志上莱布尼茨发表的一篇题为《求不局限于分数或无理数量的极大、极小和切线的新方法以及它们异常的计算类型》的论文,在此论文中他简明地解释了他的微分学,其中用公式表示的部分所标的日期是1676年。尽管论文有某些含糊之处和疏忽的错误,但事实证明,它是数学发展进程中具有里程碑意义的事件。莱布尼茨在这篇论文中所给出的微分学符号和计算导数的许多一般法则一直沿用到今天。莱布尼兹写道:

"设坐标轴AX和一些曲线VV, WW, YY, ZZ已给定(见图 5, 这是莱布尼茨画的图形,稍有简化和放大). 垂直于轴的VX, WX, YX, ZX的坐标分别为v, w, y, z. 轴上的线段AX为x. 设切线VB, WC, YD, ZE 分别交轴于 B, C, D, E 处. 现在

¹⁾ 此杂志是1682年由莱布尼茨和奥托·门克(Otto Mencke) 创办的,莱布尼茨任主编。

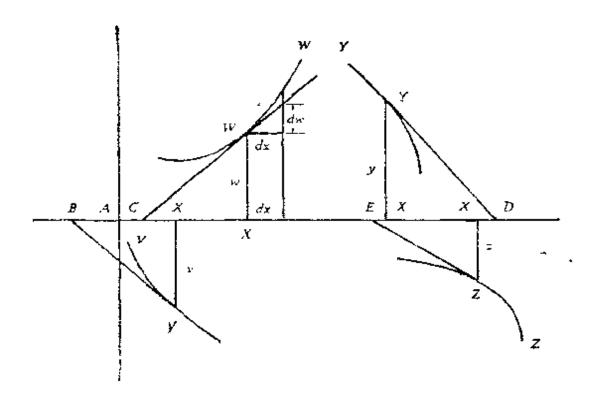


图 5

任选一线段叫做dx,而那个同dx之比相等于v(或w,或y,或z) 同XB(或XC,或XD,或XE) 之比的线段,叫做dv(或dw,或dy,或dz),也就是v(或w,或y,或z)的微分."

莱布尼茨还继续导出许多常见的微分法则,例如:

- (1) 如果a是常数,则da=0.
- (2) d(ax) = adx.
- (3) d(w-y+z) = dw dy + dz.
- (4) $d(x^n) = nx^{n-1}dx$ (n是自然数).

(5)
$$d(1/x^n) = -\frac{ndx}{x^{n+1}}$$
.

(6)
$$d(\sqrt[b]{x^a}) = \frac{a}{b} \sqrt[b]{x^{a-b}} dx.$$

(7)
$$d(vy) = vdy + ydv$$
.

(8)
$$d(v/y) = \frac{ydv - vdy}{y^2}.$$

这就是莱布尼茨的微分学,它使得微分运算变得几乎是机械的,而在这之前人们还不得不对每一个别情况采用取 极 限 的 步骤,此外,值得庆幸的是,莱布尼茨引入了一套设计得很好的、令人满意的符号,微分学已经发明出来了¹⁾.

莱布尼茨在选择合适的符号方面有独到之处。他不但为我们提供了今天正在使用的一套非常灵巧的微分学符号,而且在1675年他还引入了现代的积分符号,用拉丁词Summa(求和)第一个字母S拉长了来表示卡瓦列利的不可分量之和。虽然微分学符号的发明应完全归功于莱布尼茨,但微积分学本身的发明权则还要同英国杰出的数学家和物理学家 I. 牛顿(1643—1727)共享。其实,牛顿创造他的流数法(fluxional calculus)比莱布尼茨创造他的微分法还要早,但他直到1687年才公布他的工作。牛顿这一拖延引起了数学史上一场最大的争论:谁先发明微积分?

事实的真相是这样的:牛顿在1665年就发明了他的流数法,最初只是想把它应用于物理问题,只有同他接近的少数几个同行才知道他的这一创造。许多年后,牛顿通过当时的英国皇家学会秘书H. 奥尔登堡(Henry Oldenlurg)转给莱布尼茨一封信,在信中他简短地、也多少有些含糊地叙述了他的方法,而此时莱布尼茨也已发明丁他的微分法,在给牛顿的回信中他叙述了自己的方法。通信到此也就结束。以后几年莱布尼茨的微分法在欧洲大陆的一些主要的数学家中间口头流传着。这些数学家把它应用于许多不同的问题而获得很大的成功。但莱布尼茨实际发表他的发明是1684年。在上而所引的论文中并没有提及牛顿相应的成就。后来牛顿在他的科学巨作《自然哲学的数学原理》的注释中提到了以前通信的事。就这样,牛顿和莱布尼茨的同时代人和后继者们开始了一场优先权之争,一方指控另一方为剽窃,争论往往变得很不体面,成为英国和德国之间政治上的争吵。英国人的民族自尊

¹⁾ 在这里我们对于发明和发现不作认识论上的区别。

心如此之强,以致在争论后一个世纪左右的时间里英国数学家还坚持采用牛顿的一套术语和符号,这对英国的数学发展是极为有害的,历史的研究已经作出结论,牛顿和莱布尼茨是通过不同的途径各自独立地到达实质上是同一个目标的,因此他们两人都应被认为是微分学的发明人.

牛顿是以物理的观点来对待微积分的.他认为曲线是由点的连续运动生成的.因此,生成点的横坐标和纵坐标一般来说都是变化着的量.他把这个变化着的量称为流(流动的量),而把流的变化率称为流数.如果一个流,例如生成曲线的点的纵坐标,用少来表示,则它的流数就用少表示.在现代的表示法中,我们看到,这相当于 dy/dt,其中t表示时间.而少的流数用 y表示,对于高阶的流数可以此类推.另一方面,少的流用符号y加一小方框来表示或者有时也用y来表示.此外牛顿还引入了他称之为流的矩(moment)的概念.矩是一个无穷小量,它是在无穷小时间间隔 o中流的增量.因此,流x的矩由乘积 xo 给出.牛顿指出,我们在任何问题中都可消掉那些用o的两次幂或高次幂相乘的项,从而得到一个只含曲线生成点坐标 x和y 以及它们的流数 x 和 y 的方程.

为了说明牛顿的方法,我们举一个牛顿自己给出的例子,这个例于记述在他 1671 年写成的《流数法和无穷级数》(Method of Fluxions and Infinite Series)一书中,但此书在他逝世九年后的1736年才出版。在这里牛顿考虑了一个三次曲线

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0.$$

用x+xo替代x和用y+yo替代y,我们得到

$$x^{3}+3x^{2}(\dot{x}o)+3x(\dot{x}o)^{2}+(\dot{x}o)^{3}-ax^{2}-2ax(\dot{x}o)$$

$$-a(\dot{x}o)^{2}+axy+ay(\dot{x}o)+a(\dot{x}o)(\dot{y}o)$$

$$+ax(\dot{y}o)-y^{3}-3y^{2}(\dot{y}o)-3y(\dot{y}o)^{2}$$

$$-(\dot{y}o)^{3}=0.$$

利用 $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ 这一事实,并将剩下的各项除以 o, 然

后,舍弃含o的二次幂或高次幂的各项,我们就得到 $3x^2x - 2axx + ayx + axy - 3y^2y = 0$.

如果我们用;除上面的方程,并对y/x求解,就将得到

$$\dot{y}/\dot{x} = (3x^2 - 2ax + ay)/(3y^2 - ax).$$

当然, 在我们现代的记法中为

$$\dot{y}/\dot{x} = (dy/dt)/(dx/dt) = dy/dx$$
.

舍弃包含。的二次幂和高次幂的项,遭到了牛顿同时代一些人的强烈批评。后来,牛顿为了对该过程的合理性进行辩护,引入了最后比(ultimate ratios)的概念,这是极限思想的最原始的概念。

牛顿考虑了两种类型的问题,第一种是,给定了一些流之间的关系,求这些流和它们的流数之间的关系,这就是我们上面所做的事,显然也就是微分的过程,第二种是,给定一些流和它们的流数之间的关系,求单独的流之间的关系,这是一个反问题,等价于求解一个微分方程,牛顿将他的流数法作了很多引人注目的应用,他用他的理论来确定极大值和极小值、曲线的切线、曲线的曲率、拐点和曲线凹凸,还对许多曲线求面积和长度,在对一些微分方程积分时,他表现出非凡的才能。

微分学的产生是数学史上的分水岭或转折点.这个伟大发明产生的新数学明显地不同于从古希腊继承下来的旧数学.旧数学是静态的,而新数学是动态的.如果把旧数学比作摄影中的静画阶段,则新数学可比作动画阶段.此外,旧数学和新数学的关系就像解剖学和生理学的关系一样,前者研究死的躯体,而后者研究活的身体.再有,旧数学只涉及固定的和有限的,而新数学却包含了变化的和无限的.

不用说,微分学的产生是数学史上真正的里程碑。也许更合理的是,我们应当把它算作一个整整的时期,从1629年费马最初的努力起,经过牛顿和莱布尼茨划时代的工作以及后来五十多年的不断完善改进。下一讲我们还要更多地来谈微积分。

习 题

- 22.1 试用罗伯瓦尔方法画出(a)椭圆(b)双曲线的切线,
- 22.2 下面是笛卡儿求作曲线切线的方法(见图 6),设已知

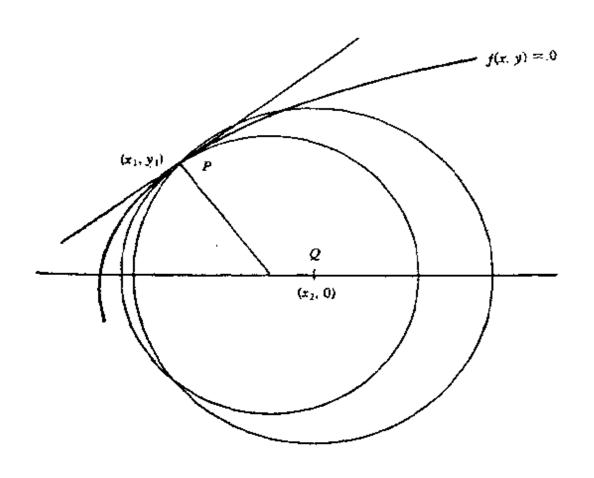


图 6

曲线的方程为 f(x, y) = 0,要在曲线上作切线的点 P 的坐 标 为 (x_1, y_1) . 又设 x 轴上一点 Q 的坐标为 (x_2, o) . 于是,以 Q 为圆心、以 QP 为半径的圆的方程为

$$(x-x_2)^2+y^2=(x_1-x_2)^2+y_1^2$$
.

在这个方程和f(x, y) = 0之间消去y,就得到一个关于x的方程,

这个方程将给出这个圆同已知曲线的两个交点的横坐标,今欲确定x₂,使得这个关于x的方程将有一对等于x₁的根,这个条件就决定了Q是x轴同曲线上P的法线的交点,因为此时圆周同已知曲线相切于P.要求的切线就是过P点垂直于PQ的直线,

试用笛卡儿法求作抛物线y2=4x在点(1, 2)处的切线。

- 22.3 试证, 曲线y = f(x)在横坐标为 x_i 的点的切线的斜 率 为 $f'(x_i)$, 这里f'(x)表示f(x)的导数.
- 22.4 试求,圆 $x^2+y^2=25$ 上一点(3, 4)的切线的斜率,用以下各种方法:
 - (a) 费马法,
 - (b) 巴罗法,
 - (c) 牛顿流数法,
 - (d) 今天在微积分课中教的方法.
- 22.5 下面的方法叫做寻求已知函数 y = f(x) 的导数的四步法。
 - 1. 在y = f(x)中用 $x + \Delta x$ 替代x, 并让 y 变为 $y + \Delta y$.
 - 2. 将所得之式减去原关系式,得到

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$
.

3. 两边除以 △x, 得到

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

4. 让Δx趋于零,两边取极限,得到

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

用四步法求以下各微分法则:

- (a) 如果y=a, 而a是常數, 则dy/dx=0.
- (b) 如果y=ax,则dy/dx=a.

- (c) 如果y=v-w+z, 而v, w, z都是x的函数,则 dy/dx=dv/dx-dw/dx+dz/dx.
- (d) 如果 $y=x^n$, n是自然数, 则 $dy/dx=nx^{n-1}$.
- (e) 如果y=uv, 则dy/dx=u(dv/dx)+v(du/dx).
- (f) 如果y=u/v, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

- (g) 如果 $y=1/x^n$, n是自然数,则 $dy/dx=-n/x^{n+1}$.
- 22.6 如果y=uv,而u,v是x的函数,证明y对于x的 n 阶导数 $y^{(n)}$ 由下式给出:

$$y^{(n)} = uv^{(n)} + nu'v^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2!}u''v^{(n-2)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u'''v^{(n-3)} + \dots + u^{(n)}v.$$

这称为莱布尼茨法则.

- 22.7 如果s=f(t)中s是物体沿着直线路径在时间t内所走过的距离,试证ds/dt是物体在时刻t的速度,而 d^2s/dt^2 是加速度.
- 22.8 证明可微函数 y=f(x) 在普通极大值或极 小 值 处 必 有dy/dx=0,并证明此虽为必要条件,但不是充分条件。

参考文献

BOYER, C. B., The History of the Calculus and Its Conceptual Development. New York: Dover, 1959.

CHILD, J. M., The Geometrical Lectures of Isaac Barrow. Chicago: Open Court. 1916.

SMITH, D. E., A Source Book in Mathematics. New York: Dover 1958.

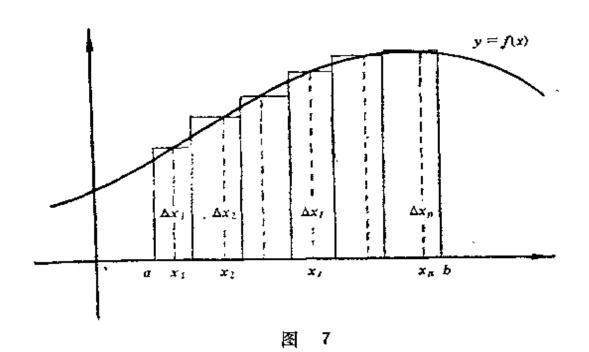
STRUIK. D. J., A Source Book in Mathematics, 1200-1800. Cambridge. Mass.: Harvard University Press. 1969.

第 23 讲

好象开门和关门

可以回忆一下,积分学起源于古代希腊人企图寻求某些面积、体积和弧长的尝试中,就以求面积为例,它的基本思想就是用许多平行的、长方的细长条面积来逼近一个面积,用现代的术语来说就是:寻求的面积是当细长条数目无限增加,而其宽度趋于零时,这些细长条面积之和所趋近的极限,随着解析几何在十七世纪最终被推广,求面积问题的提法采取了下述形式.

设y=f(x)表示一条在笛卡儿直角坐标系 x 轴上 的 连续曲线 (见图 7). 考虑由 x 轴、曲线和在 x=a, x=b 处的纵坐标线围成 的面积 A. 用纵坐标线将此面积分为 n 个竖立的长条,它们的宽度分别为 Δx_1 , Δx_2 , …, Δx_4 , …, Δx_4 , 在每个长条中选一纵坐标,例如在第一个长条中选纵坐标 $f(x_1)$, 在第二个长条中选纵坐标 $f(x_2)$ 等等。寻求的面积 A 就可近似地等于n个细长方形之



和,即

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x_i = f(x_1) \Delta x_1 + f(x_2) \Delta x_2 + \dots + f(x_i) \Delta x_i$$
$$+ \dots + f(x_n) \Delta x_n.$$

而面积 A 本身就可由下式给出:

$$A = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \emptyset = \Delta x_i \to \emptyset}} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i.$$

粗略地说,面积A是由无穷多个无限细小的长方形面积元相加而成的,用莱布尼茨后来引入的积分符号来表示,面积A就成为熟悉的定积分:

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

按定义也就是

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \mathfrak{T} - \Delta x_{i} \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i}) \Delta x_{i}. \tag{1}$$

这里f(x)dx本来是表示无限小的细长面积元的一个面积,而积分号表示这些面积元从x=a起一直相加到x=b.

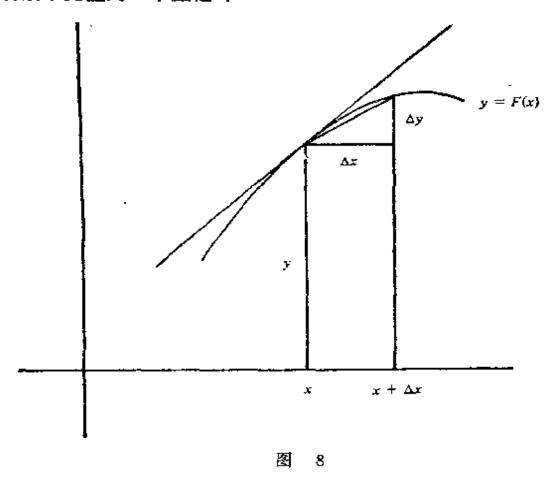
在十七世纪,微分学已经发明,正如我们在上一讲中已经学到的,函数y = F(x)的导数dF/dx可定义为

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x},$$

只要假定上述极限存在. 这个极限当然就是曲线 y = F(x) 在曲线上的横坐标为 x 的点的切线斜率(见图).

看来好像我们在积分学和微分学中研究的是两种完全不同的东西,一个是以数目越来越多的越来越小的量的和的极限为基础。另一是以微商的极限为基础。十七世纪后半个时期完成了一个真正第一流的、根本性的发现。两个似乎根本不同的研究对象原来是直接互相有联系的,在一定条件下积分和微分实际上是互逆的运算,就如同加法和减法或者乘法和除法是互逆运算一样。这一令人感到惊奇的事实就是微积分学基本定理,它的发现标志

着数学史上的一个里程碑.



我们现在简短地叙述一下微积分学基本定理证明的大意,考 虑任意定积分

$$\int_a^b f(x)dx,$$

这里f(x)是在某一区间 $a \le x \le b$ 中的连续和非负函数.如上所述,这个积分可以解释为由曲线y = f(x)、x轴和在x = a、x = b处的纵坐标线围成的一个面积.

现在让这个面积变动,它由曲线、x轴、在 x=a 处的纵坐标线、和在区间 $a \le x \le b$ 中任意一点x处的活动纵坐标线围成(见图9中带斜线的部分). 显然这个面积依赖于x,因而是x的函数,我们用A(x)来表示,现在要求

$$\frac{dA(x)}{dx}$$
.

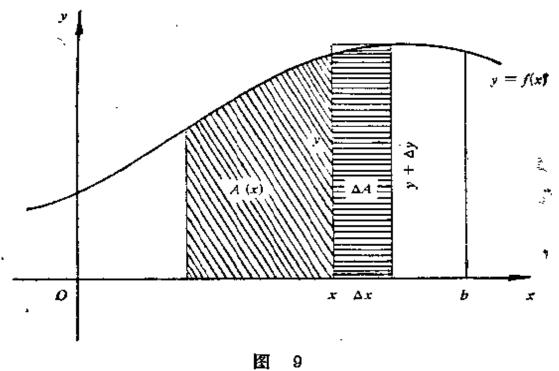
为此,让x增加一个量 Δx ,而用 ΔA 表示面积A(x)相应增加的量. 从图中容易看出,面积 ΔA (图 θ 中带横线的部分)是处在两个竖立的长方形面积之间,这两个长方形的底都是 Δx ,一个高是在 Δx 中最小的y(叫做miny),另一个高是在 Δx 中最大的y(叫做maxy). 因此 ΔA 是在(miny) Δx 和(maxy) Δx 之间. 在直观上很显然存在一个在miny和maxy之间的中间值y,使得

$$\Delta A = \bar{y} \Delta x$$
.

由此 $\Delta A/\Delta x = \bar{y}$. 当 $\Delta x \rightarrow 0$, $\bar{y} \rightarrow y$, 因而

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = y.$$

也就是说,dA/dx = y = f(x). 结论是,A(x)是一个函数,它的导数是f(x).



当然,具有给定导数的函数不是唯一的. 如果 F(x)具 有 导数 f(x), 那么可以证明,任何形为 F(x)+C 的函数 也 具有导数 f(x), 这里C是某一常数. 设F(x)是具有导数 f(x)的任一特殊的函数,则有

$$A(x) = F(x) + C.$$

当x=a时,令 A(x)=0,我们来决定C的值. 把这些值代 人最后一个方程,就得到

$$0=F(a)+C$$
,

因此C = -F(a), 而我们就有

$$A(x) = F(x) - F(a).$$

为了求出我们一开始想求的面积,我们只要让上式中的x=b,就可得到

$$A=A(b)=F(b)-F(a)$$
.

最后结论是

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

这里F(x)是导数为f(x)的任一特殊的函数,我们用符号 $\int f(x)dx$ 来表示F(x)+C,并把它叫做f(x)的不定积分,显然,求不定积分是求导数之逆,由此可见,积分和微分是互逆运算,正如同开门和关门,装满罐和倒空罐,或者加法和减法是互逆的操作一样,每一个操作能抵销另一操作,使对象又恢复到原来的状态。这就是微积分学的基本定理。

今天多数微积分的教科书都利用了微积分学基本定理来定义 定积分,把它作为一个相伴的不定积分的两个赋值的差.这时, 定积分的原始的求和定义可以作为一个定理从它们推导出来.当 然,历史是走着相反的道路:定积分被定义为如前述的方程(1) 那样的特殊类型的和的极限,而后来才发现,它也可从一个不定 积分的两个赋值的差求得.

微积分学基本定理不仅非常漂亮地把积分和微分作为互逆运 算联系起来,它也使我们有可能从微分的法则中得到积分的法则,例如,我们有:如果

$$y = x^{n+1}/n + 1,$$

这里n是自然数,那么

$$dy/dx = x^n$$
,

由此可得积分法则

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

正如A. 德摩根所指出的,在这种方法中积分就 成为"微分的回忆".

今天在我们小学中,加法的逆运算减法也常常 被 老 师 称做 "加法的回忆".例如,为了求出9-4,学生就问自己"4加上什么 才得9?".他回忆起加法表,得知4+5得 9,因此9-4=5.

微积分学基本定理也可以紧凑地陈述为如下方程:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx = f(x).$$

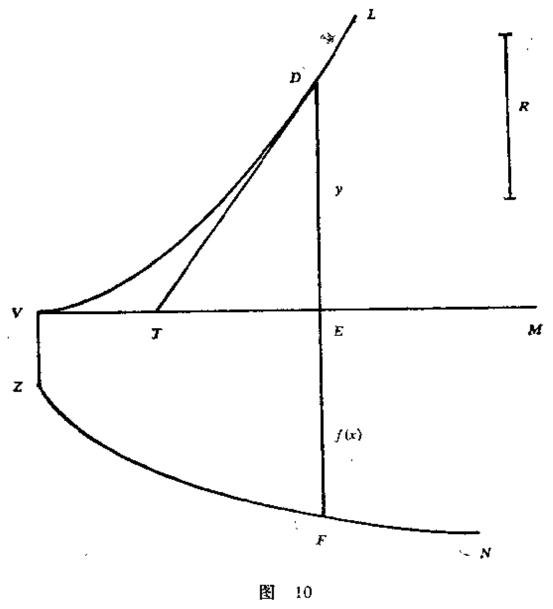
由此可见,此定理的任何证明的核心就在于指出,寻求如图 9 中图形面积的问题 $\left(\operatorname{Pr}(x) = \int_{a}^{x} f(x) dx \right)$ 可归结为寻求一曲线,使它的切线的斜率遵循已知规律 $\left(\operatorname{Pr}(dx) = f(x) \right)$ 的问题.我们上面简要叙述的证明称作代数证明,是由牛顿和莱布尼茨两人首先作出的,至少其证明的要点是由他们两人指出的.但是他们两人并不是第一个认识到积分和微分运算具有互逆关系的人.事实上,有一些比他们还早的数学家已经猜到了这种关系,并对一些特殊情形建立起这种关系.例如,大约在1646年,托里拆利就已经指出对于广义的抛物线(即方程形式为 $y=x^{*}$ 的曲线,n是自然数)存在这种互逆关系.用现代的记法,托里拆利所揭示的事实为

$$\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}x^{n}dx=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^{n}.$$

J.格雷戈里(Gregory, 1638~1675)是天才的苏格兰数学家,在很年轻时就悲惨地死去.他在其1668年发表的《通用几何》(Geometriae pars universallis)一书中,可能是第一个看到此定理的一般性,但是,通常都认为巴罗是证明此定理的第一人,他在他的1669年的《光学和几何学讲义》(Lectiones opticae et geometricae)一书

中给出了一个几何证明,巴罗建立了下述定理,这里从他的著作意译出来(用了一些不同的字母):

定理 设ZN是一纵坐标连续增大的曲线,(为了不使图形太乱,画在坐标轴VM下面),R 是一给定的线段(见图10).设LV 是这样的曲线:任一坐标线截ZN,VM 和VL分别于F、E 和D处,长宽为ED和R的长方形的面积等于VEFZ的面积。最后,令VM上的T为这样的点,使得FE:ED=R:TE.那么,TD就是曲线VL在D点的切线。



巴罗对此定理给出了一个纯几何的证明, 假设 此 定 理 已成

立,令VM为[x 轴,V[为原点,再让FE=f(x), ED=y 和R 为单位线段,则我们就有

$$y = (ED)(R) =$$
面积 $VEFZ = \int_{a}^{x} f(x) dx$.

此外还有

$$dy/dx =$$
 曲线 VL 在 D 点的斜率
= $ED/TE = FE/R = f(x)$.

由此可得出

$$\frac{d}{dx}\int_{a}^{x}f(x)\,dx=f(x),$$

而这正是微积分学基本定理.

虽然巴罗的著作已经可以表明他是知道微积分学基本定理的,但是他那笨重的几何处理方法使他不能很好地来利用这一定理,这不得不有待于牛顿和莱布尼茨后来给出的代数处理方法。牛顿和莱布尼茨的代数方法能够很好地利用微积分学基本定理来作形式的积分计算。自从他们两人利用了积分和微分的互逆关系,从形式的微分法则得出形式的积分法则以来,这种观点已经在初等微积分中固定下来。微分是基本运算,而积分则是它的逆运算。人们只要将这个求面积的方法同早期卡 瓦列 利、托里拆利、罗伯瓦尔、帕斯卡、费马和沃利斯等人所用的求同样面积的求和方法作一下比较,就会非常赞同。大致上把从巴罗1669年的著作起至牛顿和莱布尼茨后来的贡献止的二十五年作为数学史上的一个里程碑,是适当的。

被基本定理简化的积分使得微积分学不但对 数 学 本身 的发展,也对人类文明的进步产生了巨大影响,今天如果一个人一点也不懂微积分,那他就不能自称是真正受过教育的.

新工具表现出自己具有几乎难以置信的威力,它在处理许许 多多从前难以对付、无法攻破的问题时获得了惊人的成功,它的 一般方法已能应付诸如曲线弧长,非常任意的曲线所围的平面面 积,曲面面积,各种立体的体积,复杂的极大和极小问题,与变化率有关的各种问题(包括关于切线、法线、渐近线、包络、曲率的几何问题和关于速度、加速度、功、能、势、压力、重心、惯性和引力的物理问题)。新学科如此广泛和卓有 成 效的应用很自然要吸引当代数学家的研究,从而写出了大量的论文,但似乎很少有人为这学科不能令人满意的基础担心。人们将这奇妙的新工具作各种应用比考察它的逻辑坚固性要有兴趣得多,因为对一个研究者来说看到自己工作的成功就最终证明了他使用方法的正确性。自觉地、积极地重新考察微积分学的逻辑基础还不得不等到这个学科经过一番狂乱的应用之后。重新审查微积分的逻辑基础,以后还要专门讲到,因为它的成就组成了数学史上另一个卓越的里程碑。

在总结以上各讲时我们看到,微积分的发明标志着数学发展中的一个关键性时刻.它是从量变到质变的辩证规律的一个实例.数学思想和材料的缓慢积累持续了一百多年,突然,在天才的牛顿积莱布尼茨手下,进发出新方法和新观点的发明,数学转变到一个较高的水平. 雪菜曾经把这一人类思想史上伟大进步的时刻比作雪崩的形成:

而牛顿对此事的态度却不一样,他尊重自己的 前 辈,声称:"如果我看得比其他人远些,那是因为我站在巨人的肩上。"

确实,在大学低年级的数学课中没有哪一门功课比微积分更有趣、更好玩,好像有一个大马戏团的领班说过,人们能够在校园中认出那些学过微积分的学生,他们都没有眉毛,因为他们被这学科的难以令人相信的各种应用完全惊呆了,眉毛越来越往上撤退,最后终于消失在他们的脑后.

除了微积分以外,数学的其他分支学科 也 有 基 本定理. 例如,有代数基本定理(它断言,一个变量的、复系数 的 任何多项式方程至少有一复根)和射影几何基本定理(它是说,任何的射影不变量可以表示为四个共线点的基本交比不变量). 在内 容 比较充实的讲义中,这些基本定理的发现也都应算作数学史上的里程碑,但是不管如何收集、编排数学史上的里程碑,微积分学基本定理的发现总是肯定要有的.

- 23.1 自乘三次方的逆运算是什么?
- 23.2 如果u, v, w都是x 的函数, a是常数, 试证 $\int (du dv + dw) = \int du \int dv + \int dw$

和

$$\int adu = a \int du$$
.

23.3 已知 $d(\ln x)/dx = 1/x$. 试求

$$\int \frac{dx}{x}$$
.

- 23.4 已知 $d(\sin x)/dx = \cos x$ 和 $d(\cos x)/dx = -\sin x$,试求 $\int \sin x dx$ 和 $\int \cos x dx$.
- 23.5 试求

$$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+5} dx$$

- 23.6 利用习题23.4的结果和求商的微分的莱布尼茨法则,求 $d(\tan x)/dx$, 然后求 $\int \sec^2 x dx$.
- 23.7 利用习题 23.4 的 结 果, 求 d(tanx-x)/dx, 然 后 求 ftan²xdx.
- 23.8 求由曲线 $y=9x-x^3$, x 轴和在x=0, x=3 处的纵坐 标线所围的面积.
- 23.9 求由曲线 $y=2x/(1+x^2)$, x 轴和在x=0, x=8 处的 纵坐标线所围的面积.
- 23.10 求由曲线 $y=2 \sin x$, x轴和在 x=0, $x=\pi/2$ 处的纵坐标线所围的面积。

参考文献

BOYER.C. B., The History of the Calculus and Its Conceptual Development. New York: Dover, 1959.

OHILD. J. M., The Geometrical Lectures of Isaac Barrow. Chicago: Open Court, 1916.

STRUIK. D. J., A Source Book in Mathematics, 1200-1800. Cambridge, Mass: Harvard University Press, 1969.

第 24 讲

幂 级 数

中学生们在他们的代数课中遇到过算术级数和几何级数.这两个级数是比较一般的序列概念的基本和重要的特例,对这两个级数的各项求和也是比较一般的级数概念的特例.现在我们对这两个比较一般的概念给以一个形式的定义.

一串按某种固定规律或法则形成的相继的项称为序列,而序 列诸项的和就称为级数,例如 1, 4, 9, 16, 25

和

1,
$$-x$$
, $x^2/2$, $-x^3/3$, $x^4/4$, $-x^5/5$

是序列,而

$$1+4+9+16+25$$

和

$$1-x^2+x^2/2-x^3/3+x^4/4-x^5/5$$

是它们的级数:

一个序列或级数的通项(或第n项) 是一个能表明项形成规律的表达式. 例如,上面第一个例子中,通项(或第n项)是 n^2 . 令 n=1就可得到第一项,令n=4就可得到第四项. 在第二个例子中,除了第一项之外,第n项是 $(-x)^{n-1}/n-1$.

当项数是有限时,序列和级数就称为有限的;当项数是无穷时,序列和级数就称为无穷的.上面两个例子是有限序列和有限级数.当序列或级数为无穷时,我们可用前面几项,第 n 项,再加上一些小圆点来表示,如

和

$$1+4+9+\cdots+n^2+\cdots$$

我们用

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

来表示任一常数项的无穷级数,如果

$$\lim_{n\to\infty}(u_1+u_2+\cdots+u_n)$$

存在并且是有限的,我们就说级数是收敛的,否则就说级数是发散的.在收敛时,如果极限是数S,我们就说无穷级数的和是S,并记为

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

在初等微积分教程中学生们都能学到一些无穷级数收敛或发 散的判别法,在这简明的讲义中我们就不能讲这些判别法了,但 是学过无穷级数的学生可以回想一下判别法的优美和精巧,以及* 它对收敛级数卓越的应用.

中学生可以回顾一下,算术级数是如下形式的序列:

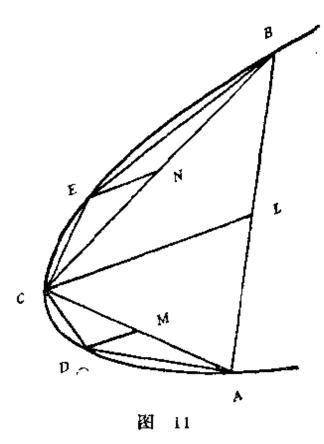
$$a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d, \dots,$$

其中 a 和 d 是固定常数;而几何级数是如下形式的序列;

$$a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1}, \dots,$$

其中a和r是固定常数.这是两种最古老的数列,它们的实例在公元前二千年的埃及和巴比伦的数学中就可以找到.但是将一个收敛的无穷级数相加求和的第一人还得首推阿基米德,他在他的《抛物线的求积》(Quadrature of the Parabola)一文中指出几何级数

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} + \dots$$



重复应用这一思想就可得到抛物线弧段的而积为

$$\triangle ABC + \frac{\triangle ABC}{4} + \frac{\triangle ABC}{4^2} + \cdots + \frac{\triangle ABC}{4^{n-1}} + \cdots$$

$$= \triangle ABC \Big(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} + \dots \Big).$$

为了寻求几何级数的和,阿基米德利用了古代的穷竭法.

虽然阿基米德是第一个对一些特殊的收敛无穷级 数 求 和 的 人,但是第一个适当考虑无穷级数收敛概念的还是以后的德国著名数学家C.F.高斯(Gauss,1777—1855),他 是 在1812年研究超几何级数时提出的¹³.

阿基米德和高斯的开拓性的工作无疑是无穷级数发展更上的重要事件,但我们将选择两个其他的事件来作为这一领域中的数学史上的里程碑,第一个事件是本讲要讲的主要内容,1715年B. 泰勒(Taylor)和1742年C.马克劳林(Maclaurin)所做的关于幂级数的工作,第二个事件是我们下一讲中将要讨论的J.傅里叶(Fourier)在1807~1822年所做的关于三角级数的工作,

一个形式为

$$a_{n} + a_{1}x + a_{2}x^{2} + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots$$

的无穷级数,含有变量 x 的正整数幂以 及 常 数 a_i ,称为 x 的幂级数 · 它是大家熟知的多项式

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

的推广, 更一般的, 形为

$$a_0 + a_1(x-a) + a_1(x-a)^2 + \dots + a_{n-1}(x-a)^{n-1} + \dots$$

的无穷级数称为x-a的幂级数.

在上述x的幂级数中,令x为一特殊的值,就得到一个常数项级数,这个级数可以收敛,也可以不收敛.很显然,当x=0时幂级数收敛.但它可以对其他所有的x值都不收敛,也可以对其他

$$1 + \frac{a}{1} \frac{b}{c} x + \frac{a(a+1)}{21} \cdot \frac{b(b+1)}{c(a+1)} x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)}{31}$$

•
$$\frac{b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}$$
 x³ + …, 这里a, b, c是不等于0, -1, -2, … 的紅意实

数.

却几何级数是如下形式的级数。

某些 x 的值收敛,甚至对所有其他 x 的值都收敛。在初等微积分的教科书中都已证明,如果幂级数对于x=b收敛,这里 b 是一正的常数,那么它对于满足 |x| < b 的所有 x 值都收敛;而如果幂级数在x=b处发散,那么当 |x| > b 时也发散。因此可得出结论,使幂级数收敛的全体 x 值组成一个形为 -b < x < b 的数区间,也可能连带上该区间的一个或两个端点值。区间 -b < x < b (或 $-\infty < x < \infty$,当级数对所有 x 的值都收敛时)称为幂级数的收敛区间,它的中心在x=0。同样,一个x-a的幂级数的收敛区间的形式为

$$a-b < x < a+b$$
,

而中心在x=a.

一个收敛的 x 的幂级数显然在它的收敛区间内是 x 的函数. 于是我们可写为

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + \dots$$

当一个已知函数写成x的幂级数形式,就称这个函数展开成x的幂级数.例如,可以证明几问级数

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots$$

在它的收敛区间 -1 < x < 1 中的所有 x 值处都收敛到1/(1-x). 因此可写成

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots, -1 < x < 1.$$

如果某一给定函数能表示成 x 的幂级数,很自然要想知道系数 a_0 , a_1 , a_2 …, a_{n-1} …究竟是什么形式的. 为了回答这个问题,可按如下步骤进行. 在

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + \dots$$

中, 令x=0, 我们就得到

$$f(0) = a_0.$$

现在假定级数是可以逐项微分的,而且这微分可一直继续进行下去,这样,我们就将有

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots,$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \dots + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \dots$$
, $f'''(x) = 6a_3 + \dots + (n-1)(n-2)(n-3)a_{n-1}x^{n-4} + \dots$, 等等. 令 $x = 0$, 利用阶乘¹⁾符号就得到 $f'(0) = a_1$, $f''(0) = 21a_2$, $f'''(0) = 31a_3$, ..., $f^{(n-1)}(0) = (n-1)1$, a_{n-1} , ...

把 a_1 , a_2 , …, a_{n-1} …解出来,并代入原来的级数 表 达式中,我们就有

$$f(x) = f(0) \div \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + \dots$$

同样可以证明更为一般的情形:如果给定的函数f(x)可无限次微分,并在它的收敛区间内可表示为x-a的幂级数,那么我们就有

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \dots$$

函数f(x)展开成x-a的幂级数最早出现在1715年英国数学家 B.泰勒(1685—1731)的著作《增量法》(Methodus incrementorun directa et inversa)中,当时并没有考虑收敛性问题. 因此,这个幂级数也称为f(x)在 x=a 的泰勒展开式. f(x) 展开成 x 的幂级数,无非就是泰勒展开式当a=0时的特殊情形,但通常称为f(x)的马克劳林展开式,尽管这种特殊情形泰勒在他的著作中明确地提出过,几年后J.斯特林(Stirling,1692—1770)也提到过. 它之所以被称为马克劳林展开式,是因为苏格兰数学家 C. 马克劳林(Maclaurin, 1698—1746) 在他的两卷有影响的巨著《流数论》(Treatise of Fluxions,1742)中用到了它,在书中他是承认泰勒和斯特林两人的工作的.

泰勒利用他的级数来解数值方程如下:设 a 是 f(x)=0 一个根的近似值,且 f(a)=k, f'(a)=k', f''(a)=k'', x-a=h.将 f(x) 在 x=a 展成泰勒展开式,舍弃 h 的高于二次的幂,将k, k',

¹⁾ r 的 除乘用r1表示,这里r是正整数,它的含义是乘积 $(1)(2)(3)\cdots(r-1)$ (r).

k"之值代入,对h求解.于是a+h就是要求的根的比较好的近似.继续重复这些步骤,就可得到越来越好的近似解.泰勒在透视理论中所做的工作在现代航空摄影测量学的数学处理中找到了应用.

入们充分认识到泰勒级数的重要性是在1775年欧拉机智地将它们应用于微分学中之后和在更后来的1797年拉格朗日把级数作为函数论的基础之后。

马克劳林是十八世纪最能于的数学家之一,他在几何方面作了非常重要的工作,尤其是他把古典几何卓有成效地应用于物理问题,在他许多应用数学的论文中有关于潮汐的数学理论的得类作品,在他的《流数论》中已经出现了关于两个旋转椭球的相互吸引的研究。

马克劳林是一位数学奇才,他在十一岁时就被格拉斯哥大学录取,十五岁时得到硕士学位并为他的关于地球引力的论文作了著名的公开答辩。十九岁时他主持阿伯丁的马利舍学院的数学系。二十一岁发表他的第一部重要著作《构造几何》(Geometria organica)。二十七岁成为爱丁堡大学的数学副教授(或助理教授)。当时大学在支付他这一职位的薪金时有些困难,牛顿表示要个人负担这笔费用,以支持这样杰出青年的工作。不久马克劳林就接替了他辅助的人的工作。他关于流数的论文发表时已四十四岁,离他逝世只有四年了。这篇论文是对牛顿的流数法所作的第一个系统的和逻辑的说明,马克劳林是为了回答 G. 贝克莱主教对微积分原理的攻击而撰写的。

只有学过微积分的人才会认识到泰勒展开式和马克劳林展开式有多大用处,但每一个学微积分以前数学的学生多少也曾惊奇过,那长长的三角函数表、对数函数表、指数函数表究竟是怎么得来的呢?回答是,它们大多是借助于幂级数计算出来的.

例如,假定我们想近似地计算。的值,容易指出 e^x 的马克劳林展开式为

$$e^{\tau} = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots + x^{n-1}/(n-1)! + \dots$$

它对于所有的 x 都是收敛的. 如果令x=1, 就得

$$e = 1 + 1 + 1/21 + 1/3! + 1/4! + \cdots$$

= $1 + 1 + 0.5 + 0.166667 + 0.041667 + 0.008333$
+ $0.001389 + 0.000198 + \cdots$, 1)

由此可以得出 @ 近似地等于2.718254,它正确到四位小数.

又如,假定我们想计算 $\sin 10^\circ = \sin (\pi/18)$ 正 确 到 五 位小数. 写出 $\sin x$ 的马克劳林展开式

$$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \cdots$$

它对一切x都收敛,由此可得

$$\sin 10^{\circ} = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{31} \left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{51} \left(\frac{\pi}{18}\right)^3 - \cdots$$

这是一个交错级数(即项的正负号是交错变化的). 已经知道,对于一个交错级数只用前面一些项产生的误差不会超过第一项被舍弃的值,由此可得

$$\sin 10^{\circ} = 0.174532 - 0.000886 + 0.000001 - \cdots$$

第三项已不影响第五位小数,因此只取展开式中前两项就可正确 到五位小数:

$$\sin 10^{\circ} = 0.17365$$
.

再如, 我们用幂级数来求

$$\int_0^1 \sin x^2 dx$$

的近似值。今z=x2,按马克劳林展开式有

$$\sin z = z - z^3/31 + z^5/51 - \cdots$$

因此

$$\sin x^2 = x^2 - x^6/3! + x^{10}/5! - \cdots$$

对于一个收敛的幂级数人们可以逐项积分,只要积分的上下限在 级数的收敛区间内:

¹⁾ 这些项很容易算出,只要注意到第 :-1 项除以 : 就得第 : 项。

$$\int_{0}^{1} \sin x^{2} dx = \int_{0}^{1} \left(x^{2} - \frac{x^{6}}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} \right) dx, \text{ 近似地,}$$

$$= \left[\frac{x^{3}}{3} - \frac{x^{7}}{42} + \frac{x^{11}}{1320} \right]_{0}^{1}$$

$$= 0.3333 - 0.0238 + 0.0008 = 0.3103.$$

1967年完成的对用的异想天开的计算(超过五十万位小数)也是借助于幂级数和现代计算机进行的,此时,幂级数的爱好者和研究者们一定是非常高兴和激动的,泰勒展开式和马克劳林展开式的发现肯定地标志着数学史上的一个里程碑,

习 题

- 24.1 (a) 求首项为a、公差为d的算术级数前几项和的公式.
- (b) 求首项为 a、公比为 r 的几何级数前几项和的公式:
- (c) 如果|r|<1, 试证

$$\sum_{n=0}^{\infty} a r^n = \frac{a}{1-r}.$$

- 24.2 (a) 求解下述在兰德纸草书(约公元前1650年)上发现的问题: "将100个面包分给5个人,使得分成的各份成算术级数,并且大的三份之和的七分之一等于小的两份之和."
- (b) 数学史家O.诺伊格包尔(Otto Neugebauer)(1899~)在古代巴比伦的泥板书(约公元前300年)中已发现一些 有趣的级数问题,其中有一个可表述为

$$1+2+2^2+\cdots+2^9=2^9+2^9-1$$
.

验证此式.

(c) 试证阿基米德求和式

$$1+1/4+1/4^2+\cdots+1/4^{n-1}+\cdots=4/3$$
.

24.3 (a) 用数学归纳法证明

$$\sum_{i=1}^{n} i^{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3} \sum_{i=1}^{n} i.$$

(b) O. 诺伊格包尔在古代巴比伦泥板书(约公元前300年)中发现下式:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\left[1\left(\frac{1}{3}\right)+10\left(\frac{2}{3}\right)\right]55=385.$$

指出它是习题24.3(a)中公式的一个应用·

- 24.4 类似于讲义中将已知函数f(x)展开成x的幂级数,请将f(x)展开成x-a的幂级数,求出其各项的系数。
 - 24.5 (a) 求 e^x , $\sin x$ 和 $\cos x$ 的马克劳林展开式.
- (b) 假定e*的马克劳林展开式对于复数的 x 也都成立,形式 地证明(如欧拉所作的那样)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
.

(c) 从习题 24.5(b) 中得到联系数学中五个最重要的数的关系

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$
.

- 24.6 计算 \sqrt{e} 到四位小数.
- 24.7 利用 $\cos x$ 在 $x = \pi/4$ 附近的泰勒展开式,求 $\cos 44$ °到五位小数。
- 24.8 用微分 sin x的马克劳林展开式来求 cos x的马克劳林展开式。
 - 24.9 计算 $\int_0^1 \cos \sqrt{x} \, dx$ 到三位小数.
 - 24.10 计算 $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ 到三位小数.

参考文献

HEATH.T. L., The Works of Archimedes. New York: Cambridge University Press, 1897 Reprinted by Dover.

KNGPP, KONRAB. Theory and Application of Infinite Series. transl. by R.C. Young, London: Blackie, 1928.

第 25 讲

Yea + Yea + Yea + Yea

十七世纪是数学发展中的一个辉煌时期。这个世纪的前期,纳普尔发明了对数,哈里奥特(Harriot)和奥特雷德(Oughtred)对于代数的符号记法和系统化作出了显著的贡献,伽利略奠定了动力学的基础,开普勒宣布了他的行星运动三大定律。这个世纪的后期,德沙格和帕斯卡开创了新的射影几何领域;笛卡儿开始了解析几何的研究;费马奠定了现代数论的基础;帕斯卡、费马和惠更斯建立了数学概率的理论;帕斯卡和莱布尼茨发明了第一台计算机。到这个世纪的末期,经过许多数学家的努力,划时代的贡献——微积分的创建,终于由牛顿和莱布尼茨完成。因此,在十七世纪这一时期,许多新的、大的数学领域都已经开始研究。现代数学的曙光已经在望。

辅之以解析几何的微积分无疑是十七世纪发现的最伟大的数学工具,其显著的应用性引人注目,许多过去很难对付的各种问题,微积分都能处理得非常成功,因此,它吸引了几代数学家,可以公正地说,十八世纪的大部分数学和十九世纪早期的部分数学研究都是致力于开拓这一新的、强大的数学工具,但事情往往如此:一个学科由于它眼花缭乱的应用结果,很少有人去考虑它的逻辑基础是否令人满意,函数概念本身也一直没有被彻底弄清楚,而像极限、连续、可微、可积和收敛这样一些概念还处于十分模糊的状态之中,直到十九世纪重建微积分基础时期才彻底阐明了这些基本概念.

然而,微积分的大量直观的应用在这一个多世纪中都达到了目的。这个时期很多数学大师都在搞微积分的应用;他们之中有:雅科布·伯努利 (Jacob Bernoulli, 1654—1705)、约翰·伯努利

(Johann Bernoulli, 1667—1765)、L. 欧拉(1707—1783)、C. A. 克雷罗(Clairaut, 1713—1765)、达兰贝尔(1717—1783)、J. H. 兰伯特(Lambert, 1728—1777)、拉格朗日(1736—1813)、拉普拉斯(1749—1827)和A. M. 勒让德(Legendre, 1752—1833).

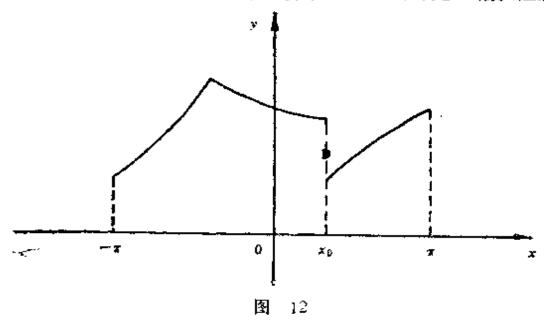
在这些大师们的成就和杰作中应该提到的是:(1)雅科布· 伯努利关于悬链线的研究(后来推广至变密度的 弦 和在中心力作 用下的弦的情形),等时线的发现(所谓等时线就是物体沿着它以 均匀垂直速度下落的曲线),以及关于水平弹性杆一端固定、一 端挂着重物所呈的形状,具有两个对边的长方形的柔软薄片、水 平地放在同一高度、装着有重量的液体所呈的形状,鼓满了风的 长方形帆所呈形状的研究; (2)约翰·伯努利关于光的反射和 折射的工作,决定曲线族的正交轨线的研究,以及他对最速降线 问题的贡献(所谓最速降线是在重力场中两 点 之间质点沿着它走 时间最短的曲线); (3) 欧拉 1748 年的两卷本名著《无穷 小 分析 引论》(Introductio in analysin infinitorum), 1755年的内容丰富的 《微分学原理》(Institutiones calculi differentials), 1768—1744 年的 三卷本姊妹篇《积分学原理》(Institutiones calculi integralis)和关于 力学的一些著作,它们许多年来被当作教科书和教科书的典范, 还有他的无数关于应用学科的论文; (4)克雷罗 1743 年的权威著 作《关于地球形状的理论》(Théorie de la figure de la Terre)和他 1752年得奖的论文《关于 月 球 的 理 论》 (Théorie de la Lune); (5)达兰贝尔1743年的《动力学论著》(Fraité de dynamique),它是 在现在称为达兰贝尔原理的基础上写成的,以及他后来关于流体 的平衡和运动(1744年)、风的成因(1746)、弦的振动(1757)等的 论文; (6) 兰伯特对于双曲函数的发展和决定彗星轨道的工作; (7) 拉格朗日1788年的不朽巨著《分析力学》(Mécanique analytique)和1797年的《微分原理中的解析函数论》(Théorie des fonctions analytiques contenent les principes du calcul différentiel), (8) 拉 普拉斯1793-1825年的五卷集巨著《天体力学》(Traité de mecanique celeste),这本书使他博得了"法国的牛顿"的称号,以及他 1812年的《概率的分析理论》(Théorie analytique des probabilites); (9)勒让德关于椭圆函数、最小二乘法和微分方程的工作。

在提到的这些工作中许多都可以在数学史上的里程碑中争得一席荣誉的地位。因为时间和篇幅问题,我们就不对它们多加讨论了。现在我们只提到法国科学院一次值得注意的会议,这次会议是1807年12月21日举行的。这次集会中三十九岁的数学家和工程师J. 傅里叶(Fourier)宣布的论文在数学史上写下了富有成果的新篇章。

与他同时代的许多科学家一样,傅里叶对于热在金属棒、板和体中流动的实际问题产生兴趣。他向法国科学院提交了一篇关于热传导的基础论文。在这篇论文中他宣布了一个惊人的事实。在有限闭区间上由任意图形定义的任何函数都可以分解成单纯的正弦和余弦函数之和。傅里叶还更明确地声称,任何定义在区间(一元,元)上的函数,不管它如何变化都能在此区间上表示为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad (1)$$

这里的a和b都是一些适当的实数。这样的级数称为三角级数,对于当代的数学家来说已不是什么新东西。确实,许多函数(性态好



的或性态不好的)都已被证明能表示为这样的级数.但傅里叶所宜 称的是,定义在 $(-\pi,\pi)$ 上的任意函数都能如此表示.

现在以图12为例来说明情况。图12是在区间 $(-\pi,\pi)$ 上随便画的一个图形。因为正弦和余弦函数是以 2π 为周期的函数,所以任何用三角级数表示的函数也必定是以 2π 为周期的周期函数。图 12 中的图形在 $-\pi$ 的左边和在 π 的右边应该是不断重复的。因此,人们也就不必选择区间 $(-\pi,\pi)$ 为周期区间,任何长度为 2π 的区间 $(C,C+2\pi)$ 都可同样作为这种区间。

会议上的院士们都不太相信傅里叶所宣布的事实。因为正弦和余弦函数都是解析的(即无限次可微的),所以他们自然认为,这些函数的和也必定是解析的,但解析函数实际上与在一个区间内可任意变化的函数相去甚远。例如解析函数有这样的性质:如果它的图形在任意小的区间,譬如在 $(-\pi,\pi)$ 中的一小段上,是已知的,那么这个图形到处就被唯一地确定。这个事实怎么能同傅里叶所宣称的图形在整个区间 $(-\pi,\pi)$ 上的任意性相协调呢?

论文是由拉格朗日、拉普拉斯和勒让德评审的,结果是被否决了,但为了鼓励傅里叶更严密地发展他的思想,法国科学院把热传导问题定为1812年颁发的大奖课题,傅里叶在1811年呈交了修改好的论文,由包括上述三人的小组评审,论文获得了奖金,但还是受到了缺乏严密性的批评,所以没有被刊登在科学院的《报告》(Mémoires)上,

傅里叶为此很感愤慨,但他继续进行关于热的研究,并在1822年发表了一部数学经典著作《热的解析理论》(Fhéorie analytique de la chaleur).这本书收编了他1811年论文的第一部分,未作实质性的改动。傅里叶的思想主要都出自这本书。两年后,傅里叶成了法国科学院的秘书,在这个职位上他能够将他1811年的论文原封不动地发表在科学院的《报告》上。

可以证明,如果函数f(x)能用三角级数(1)表示,并且级数(1)从 $-\pi$ 到 π 能够逐次积分,那么级数的系数由下式给出:

$$a_{n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \ dx,$$

$$b_{n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \ dx.$$
(n>0)
(2)

欧拉已经知道这个公式,但它们更普遍地为人们所知是通过傅里叶的工作,这个表这式今天被称作f(x)的傅里叶系数,

三角级数(1),如果具有由(2)决定的系数,就称为f(x)的傅里叶级数.很自然会产生如下的问题:对于什么样的f(x),它的傅里叶级数能在区间(一元,元)上收敛到f(x)的值?傅里叶认为,对于任何的f(x),它的傅里叶级数都能收敛到f(x),但他没有能严密地论证这点.因此尽管有非常广泛的函数类f(x),它们的傅里叶级数就能代表f(x),但他认为对任何函数都能有此结论,也未免是太过分了.后来,在1829年德国数学家P.G.L.狄利克雷(Dirichlet,1805—1859)证明了下述重要定理:

秋利克雷定理 如果f(x)在闭区间, $[-\pi,\pi]$ 上单值、有界,并且只有有限个不连续点和有限个极大和极小,那么f(x)的傅里叶级数在f(x)所有连续的点上都收敛到f(x),而在f(x)不连续的点上收敛到它左、右极限的平均值上。

图12给出了狄利克雷定理在不连续点 x₀ 的情况,级数在x₀处的值是由图中该点处的"跳跃"的中点的纵坐标给出的.

狄利克雷的条件是收敛的充分条件,但不是必要条件,直至 今天还没有找到一个既是充分、又是必要的条件,但狄利克雷的 充分条件已经得到改进,不管怎样,在实际的物理和工程问题中 遇到的全部周期函数都是满足狄利克雷条件的.

用傅里叶级数表示的函数在性质上可以有很大的任意性.比较起来,上一讲我们讨论的幂级数就限制得要多得多,因此傅里叶级数比起幂级数来也是更为有力的工具.事实证明,傅里叶级数在声学、光学、电动力学、热力学等这样一些研究领域是非常有价值的,而在调和分析、桥梁问题和解微分方程方面起着基本

的作用,在数学物理方法中求解满足边界条件的偏微分方程的现代方法也正是由傅里叶级数所激发的,在下一讲中我们还将看到傅里叶级数在函数概念的发展过程中所起的重要作用,

事实证明了傅里叶是正确的,而不是那些最初批评他的人是正确的.虽然傅里叶对于他的级数的要求也许失之过宽,但他的批评者们对级数的限制也未免过严.这些批评者所犯的错误在当时是很普遍的,他们认为收敛级数每一项所具有的性质,例如连续性或可微性,级数的和也应该具有.

J. 傅里叶(Fourier)1768年生于欧塞尔(Auxerre),1830年卒于巴黎·八岁时就失去父母成为孤儿,他是在由本尼迪克了(Benedictines)领导的地方军事学校中受的教育·因为他是裁缝的儿子,所以不能在军队中取得军官资格,但因为他学业成绩优异,所以还是让他在军事学校当上了数学讲师·他密切注视着1789这个不祥之年,加入了平民的政党,热情地投身于促成法国大革命的事业·他得到了巴黎高等工艺学院教授的职位·后来他辞去了这个职位,为了与数学家G·蒙日一起能伴同拿破仑远征埃及·1798年他被任命为下埃及的地方长官·1801年英国胜利和法国投降以后,他回到了法国,任格勒诺布尔(Grenoble)的行政长官·就在这时候,在格勒诺布尔,他开始进行关于热的试验·1816年他迁到巴黎·

傅里叶除了1822年出版的关于热理论的论文以外,还编过一些书,但没有完成,他死后1831年才出版,其中有一部分内容就是今天教科书中讲的方程论和多项式根的位置。

三角级数在大多数工程的应用中都不是要求在长度为 2π 的区间上,而是要求在长度譬如为2L的区间上展开给定的函数.我们可以通过将区间 $(-\pi,\pi)$ 拉长(或压缩) L/π 之比率来考虑区间(-L,L).因此,如果我们用z表示相对于区间 $(-\pi,\pi)$ 的变量,就要求有, $x/z=L/\pi$,也即 $x=Lz/\pi$ ·我们将 $f(x)=f(Lz/\pi)$ 看作z的函数,并假设对于 $-\pi< z<\pi$,傅里叶级数有效.将 $z=\pi x$

/L代入这个级数,我们就得到对于一L<x<L有效的f(x)的表示式,傅里叶还采用了这样的思想,在这后一个级数中让 L变成无穷大,于是,他作出了一个最卓越和独创的发明,这就是所谓傅里叶积分,其定义为当所讨论的函数周期趋于无穷大时傅里叶级数的极限,在这里我们就不深入研究这些问题了,但是所有读过高等数学的大学生都会表示出他们从学习这部分材料中所得到的无上快乐。

凯尔文勋爵(William Thomson, 1824—1907) 认为,他在数学物理上的全部成功都是受了傅里叶研究热理论的影响,而C·麦克斯韦(Maxwell,1831—1879)则宣称,傅里叶的论文是"一首伟大的数学的诗".

关于傅里叶以及他对热的迷恋,流传着一个很好笑的故事。似乎是出于他在埃及得到的经验,也可能是由于他对于热的不断研究,他坚信沙漠的热是健康的理想环境,所以他总是穿好几层大褂,住在难以忍受的高温房间里。据说,正是这种对热着了魔似的妄想加速了他的死亡。他在六十三岁时死于心脏病,实际上是热死的。

傅里叶在他早期的关于热的数学理论的著作中曾经写道:"深入研究自然是数学发现最丰富的泉源".这也许是被人引用得最多的傅里叶的名言.

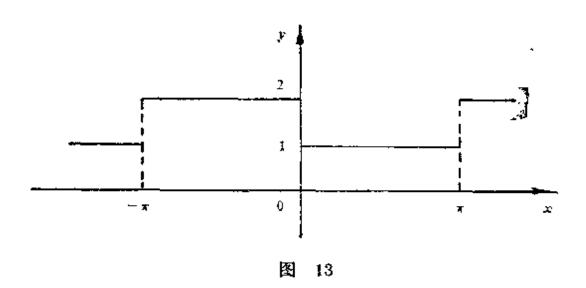
在结束本讲时,我们用一些例题来说明傅里叶级数,而把一些计算的细节留作习题.

例1. 考虑函数f(x),它的定义为

$$f(x) = 2, -\pi < x < 0,$$

 $f(x) = 1, 0 < x < \pi.$

在x=0处没有定义(见图13). 但接狄利克雷定理,f(x)的傅里叶级数在x=0处的值应为 I 和 2 的平均值,即 $f(0)=\frac{3}{2}$. 此外,由于级数的周期特性,函数f(x)对于不在区间 $(-\pi,\pi)$ 内的任意x



也都有了定义,而且我们当然认为应该有 $f(-\pi) = f(\pi) = 3/2$. 很容易求得函数f(x)的傅里叶级数,它就是

$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right).$$

要指出的是, $f(-\pi)=f(0)=f(\pi)=3/2$ 是预先要求的. 如果令 $x=\frac{\pi}{2}$,则由于 $f(\pi/2)=1$,我们可得到

$$1 = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \right),$$

即

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

这是一个交错收敛级数,可用来表示π/4、

例2 考虑函数 f(x), 它的定义为

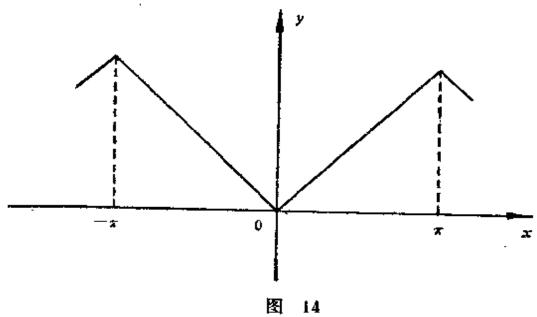
$$f(x) = -x, \quad -\pi < x \le 0,$$

$$f(x) = x, \quad 0 < x < \pi.$$

虽然这个函数在 $(-\pi, \pi)$ 中没有问断点,但它在x=0处不可微 (见图14). 这个函数的傅里叶级数为

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right).$$

将x=0代入上式,我们就得到另一个含 π 的有趣的级数:



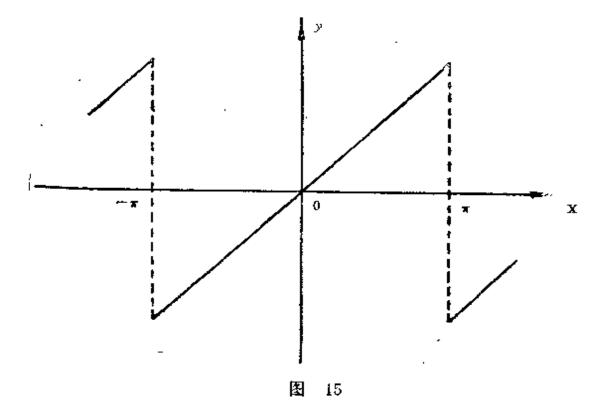
图

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots \right),$$

即

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

考虑函数f(x),它的定义为 例3



$$f(x) = x, -\pi < x < \pi.$$

这个函数在区间 $(-\pi,\pi)$ 的右半边同例 2 的函数是一致的,但在 左半边是不同的(见图15)。这里,傅里叶级数为

$$f(x) = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots\right).$$

要指出的是 $f(-\pi) = f(\pi) = 0$,而这同狄利克雷定理所预言的值是一致的.

习 题

- 25.1 试证, 当 $n \neq 0$ 时, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0$.
- 25.2 为什么在讲义正文中把级数(1)中的常数项写作 $a_0/2$, 而不写作 a_0 ?
 - 25.3 求正文中例 1 的傅里叶级数.
- 25.4 试证,正文中例 1 的函数在给定范围内可以表示成一个单独的方程:

$$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{x}{2|x|}.$$

- 25.5 试证, cos x的正零点倒数的平方和等于1/2.
- 25.6 利用积分公式

$$\int x \cos nx \, dx = \frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} + C,$$

$$\int x \sin nx dx = \frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} + C,$$

求正文中例2和例3的傅里叶级数.

25.7 由正文中例 3 的傅里叶级数求得收敛级数

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

参考文献

BELL, E. T., Men of Mathematics. New York: Simon and Schuster, 1937.

LANCZOS, Cornelius, Discourse on Fourier Series. Edinburgh: Oliver & Boyd 1966.

第 26 讲

几何学的解放(一)

现在我们来讲十九世纪上半叶数学史上两个很重要的转折. 第一个是,在1829年左右发现了与人们所熟知的欧几里得几何有 显著区别的一种自相容的几何,第二个是,在1843年发现了与通 常的实数系代数有本质区别的一种代数.无论依什么标准挑选, 这两个发现都堪称数学史上的里程碑.为了作出公正的安排,对 每一个发现都给予两讲的篇幅.无论对于哪一个,我们都很强调 其来龙去脉,这是因为它们都与数学的基本概念有关,不对其起 源作一番分析,想真正理解这些概念是不可能的.

这两项发现中的第一项是人类思想史上的一个重大事件.同数学发展史上许多动人心弦的故事一样,人们发现:其本源可一直追溯到古希腊的光辉年代,因为它是由对欧几里得《原本》的第五公设的批评引起的.那条公设是:

如果同一平面内一直线同另外两直线相交,同一侧的两内角之和小于两直角,则两直线无限延长时,必在这一侧相交.

公元五世纪新柏拉图学派的哲学家和评注家普罗克鲁斯(Proclus)在共《欧儿里得原本卷一评注》中告诉我们,这条公设很早

就受到批评.只要粗略地读一下欧几里得的五条公设",就会看出.第五条公设与其它四条有引入注目的差异;它既没有"自明性",又是古希腊的实质公理学"所难以接受的.进一步研究得知.第五公设实际上是欧几里得的命题 I 17的逆命题.在许多人看来,它很象定理而不象公设,这也就没什么可奇怪的.而且,欧几里得本人也竭力推迟使用它,一直到命题 I 29才不得不利用它.

现在如果一个人不喜欢某研究领域的公理化发展中的某个特殊公设,那么对于它只有两种处理办法:或者以一个比较容易接受的等价的公设来代替它,或者把它当作一条定理由其它公设推导出来,从很早起,沿这两条路线都作过不少尝试,

多少年来曾提出或隐含地假定作为平行 公 设 的 替代公设的有:

- (1) 存在一对同平面的直线彼此处处等距离:
- (2) 过已知直线外的一个已知点只能作一条直线平行于已知 直线·
 - (3) 存在一对相似但不全等的三角形.
- (4) 如果一个四边形有一对对边相等,并且它们与第三边构成的角均为直角,则余下的两个角也是直角。
 - (5) 如果一个四边形有三个角是直角,则第四个角也是直角。
 - (6) 至少存在一个三角形, 其三个角的和等于两个直角.
- (7) 过小于60°的角内一点,总能作一条直线与该角的两边相交。
 - (8) 过任何三个不在同一直线上的点可作一圆,
 - (9) 三角形的面积无上限,

在各种各样的替代公设中,今天中学几何课本中最喜欢用的是上述的(2),现代人们把它归功于苏格兰物理学家和数学家J.普雷菲尔(Playfair,1748—1819),虽然这个特殊的选择早就有别

¹⁾ 这些公设的陈述,参看第8讲或第27讲附录。

²⁾ 关于实质公理学的评论,参看第7讲,

人用过,甚至早在公元五世纪就由普罗克鲁斯陈述过.显然,上述的这么多替代公设并不比欧几里得的公设好接受,因为它们或者同样复杂,或者假定了绝不是"自明的"几何性质.

试图证明上述的各种选择与欧几里得原来的公设的等价性,构成一组有趣的、引人注目的练习.为了证明欧几里得的公设与某一特殊的选择等价,我们必须证明.这个选择可作为定理由欧几里得的假定推出,并且,在平行公设被所考虑的这个选择代替后,欧几里得的公设也可作为定理由这个新的体系推出.

多少个世纪以来,从欧几里得的其他假定推导出平行公设的尝试是如此之多,差不多够一个军团,所有这些尝试均以失败告终,它们中的绝大多数或迟或早被证明依靠了与该公设本身等价的隐含的假定,据我们所知,在这方面最早作过努力的是 C·托勒密(Ptolemy,大约公元150年),普罗克鲁斯指出了托勒密的尝试的缺点:证明他无意中假定了过已知直线外一点只能作一条直线平行于该直线,而这个假定就是与欧几里得的公设等价的普雷菲尔公设。

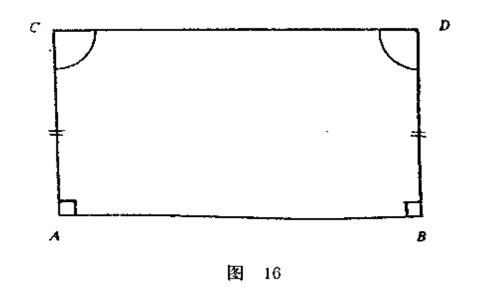
普罗克鲁斯本人也作了一个尝试,但是他的"证明"建立在平行线间总保持有界的距离这个假定的基础上,可以证明这个假定蕴涵欧几里得的第五公设.比这迟些,十三世纪的纳瑟·埃德·J(Nasir ed din, 1201—1272)作出了一个较为有意义的尝试,他是波斯的天文学家和数学家,他以一个较早的阿拉伯文译本为依据编纂了《原本》的一个修订本,并且写了关于欧几里得公设的论文;但是,这次尝试也蕴涵与要"证明"的公设等价的一个默认的假定,

重新提出对欧几里得第五公设的批评,对于文艺复兴后西欧几何学的发展是一个重大的鼓舞。在十五世纪宋、十六世纪初出版的《原本》的较早版本中几乎找不到任何这类评注。直到1533年,普罗克鲁斯的《欧几里得原本卷一评注》的一个译本出版,许多人才再一次着手对第五公设进行评析。例如,在牛津大学担任讲座教授的J. 沃利斯(Wallis, 1616—1703) 就对纳瑟·埃德·J的著

作感兴趣,并且,1663年 沃利斯 本人也提供了平行公设的一个"证明",但是他的尝试蕴涵等价的假定,即存在相似但不全等的三角形.为把欧几里得公设作为定理导出而作的所有尝试都是这样的;每一种尝试都蕴涵徒然的循环。或者假定了与所要证明的事实的等价假定,或者有某种其它形式的推理错误。这类工作中的绝大多数,对数学思想的进展没什么现实意义,直到1733年G·萨谢利(Saccheri)才做出了关于平行公设的值得注意的研究 成果.

萨谢利1667年出生于意大利的圣拉蒙,少年早熟,二十三岁就完成了其耶稣会神职的见习期,然后一直在大学担任教学职务。在米兰的耶稣会学院中讲授修辞学、哲学和神学时,他读了欧几里得的《原本》,并且醉心于强有力的归谬法。稍迟,在都灵教哲学时,他发表了《逻辑证明》(Logica demonstrativa)一书,其中主要改进是:应用归谬法来处理形式逻辑。几年以后,在帕维亚大学任数学教授时,他把他喜爱的归谬法用于对欧几里得平行公设的研究。他为这项工作做了很好的准备:在其较早的关于逻辑的著作中已经灵活地处理了定义和公设这类事物。他还熟悉其他人讨论平行公设的著作,并且成功地指出了在纳瑟。埃德·J和沃利斯的尝试中的谬误。

在曾经研究过否定欧几里得平行公设会得到什么样的结果的人当中,萨谢利显然是第一个试图应用归谬法来证明这一著名公设的,他的研究结果写在题为《排除任何谬误的欧几里 得》(Euclides ab omni naevo vindicatus)的一本小书中,这本书是于 1733 年作者去世前几个月在米兰出版的。在这一著作中,萨谢利承认欧几里得《原本》的前二十八个命题,正如我们早已指出过的,在证明它们时都不需要第五公设。借助于这些定理,他进一步研究等腰双直角四边形,即四边形ABDC(参看图16),在其中,AC=BD并且《A和《B均为直角》作对角线AD和BC并且利用简单的全等定理(这在欧几里得的前二十八个命题中可以找到),萨谢利就容易地证明了,《C和《D被此相等》但是,没法确定这两个



角的大小. 当然,作为欧几里得第五公设的推论,可推出这两个角均为直角,但是我们并不想采用此公设的假定. 因而,这两个角可能均为直角,或均为钝角,或均为锐角. 萨谢利在这里坚持了开放的思想,并且把这三种可能性命名为直角假定、钝角假定. 和锐角假定. 他的计划是以证明后两个假定导致矛盾来排除这两种可能,然后,根据归谬法就只剩下第一个假定了. 但是,此假定可被证明等价于欧几里得第五公设. 这么一来,平行公设就被证明了,欧几里得假定的缺陷就被排除了.

取消钝角假定和锐角假定的工作,其实是很艰难的.萨谢利以其娴熟的几何技巧和卓越的逻辑洞察力,证明了许多定理,现 将其较重要者列之于下:

- 1. 如果三个假定之一对于某一个等腰双直角四边形为真,则它对于每一个这样的四边形为真。
- 2. 以直角假定、钝角假定或锐角假定为前提,三角形的内 角和分别等于、大于或小于两个直角.
- 3. 如果存在某一个三角形,其内角和等于、大于或小于两个直角,则可分别推出直角假定、钝角假定或锐角假定为真。
- 4. 给定一条直线和线外一点,以直角假定、钝角假定或锐 角假定为前提,则过该点分别有一条直线、没有直线或有无穷多

直线不与该给定直线相交.

5. 以直角假定为前提,立于固定直线上的定长垂线的顶点 随着其另一端移动时形成的轨迹是一条直线,以钝角 假定为前提,此轨迹对于固定直线是凸曲线,以锐角假定为前提,此轨迹 对于固定直线是凹曲线.

正如欧几里得在其命题116的证明中所做的,萨谢利也隐含地假定直线为无限长,用以取消了钝角假定,然而要对付锐角假定就困难多了。萨谢利在得到许多所谓非欧几何的经典定理之后,毫无说服力地硬把包含关于在无穷远处的元素的模糊思想的不能令人信服的矛盾塞进他的推演中。在这之前,萨谢利做了那么多认真细致的工作,我们很难相信,萨谢利本人真的被他的无意义的结论说服。如果他不是那样迫不及待地提出。在这里存在矛盾,而是大胆地承认自己没能力找到矛盾,那么,今天无疑会把非欧几何的发现归功于萨谢利。他的著作看来对他的同时代人没产生多大影响,并且,没过多久就被人们遗忘了",一直到1889年,才被他的同胞E. 贝尔特拉米(Beltrami, 1835—1900)戏剧般地给予新的生命。萨谢利著作的主要部分曾被译成英文,学过初等几何的学生也能读懂?。

1766年,萨谢利发表其著作之后三十三年,瑞士的 H. 兰伯特 (Lambext, 1728—1777)写了一本标题为《平行线理论》的著作,作 了类似的研究;不过,这部著作是在兰伯特死后十一年才发表的. 兰伯特选作基础图形的是三直角四边形,它可以看作是. 连接萨谢利等腰双直角四边形两底中点而形成的"半个萨谢利四边形". 和萨谢利一样,兰伯特按照三直角四边形的第四个角是直角、钝角或锐角作了三个不同的假定.

¹⁾ 关于萨谢利的杰作为什么未引起注意,有一个富有戏剧性的解释,数会作出了没收、充公的暗示。萨谢利也许自始至终认为在锐角假定下找不到矛盾,只不过是为了让他的著作能通过数会的审查, 才毫无诚意地做了个不可能愚弄数学家的谬论。是不是这么回事?参看,例如,E. T. Bell著《The Magic of Numbers》第25章.

²⁾ 参看本讲"参考文献"中G. B. Halsted和D. E. Smith的著作。

兰伯特和萨谢利都在钝角和锐角的假定下推演出了不少命题,然而,兰伯特走得更远。例如,和萨谢利一样,他证明了:在这三个假定下分别可推出三角形内角和等于、大于或小于两个直角;然而,他进一步证明了:在钝角假定下大于两个直角的超出量和在锐角假定下小于两个直角的亏量均与三角形的而积成正比。他看到由钝角假定推出的几何与球面几何的类似之点。在球面几何中,三角形的面积与其球面角盈成正比。他还猜测。由锐角假定推出的几何也许能在虚半径的球上被证实,这也猜对了。

兰伯特作出的另一个值得注意的发现,涉及到由钝角假定和 锐角假定推出的两种几何中长度的测量。在欧几里得几何中,因 为存在相似非全等图形,长度只能用象英尺或米这样的与该种几 何无结构上的联系的任意单位来测量。数学家们说,在欧几里得 几何中长度是相对的,角是绝对的,其涵义正在于此。兰伯特发 现.在钝角和锐角假定下,角仍然是绝对的,但长度也是绝对 的.事实上,在这两种几何中,能够证明.对每一个角存在一个 对应的线段,使得对应于一个测量角的自然单位,存在一个测量 长度的自然单位。

兰伯特和萨谢利做过的一样,以默认直线为无限长这个假定来取消钝角假定,但是,他的关于锐角假定的结论是含糊的、不能令人满意的,实际上,兰伯特对于是否在他的著作中发表这个结论一直没拿定主意,那是他的朋友们在他死后发表的.

用归谬法证明欧几里得平行公设的第三个卓越的贡献,是又过了不少年后由法国著名数学家A. M.勒让德(Legendre, 1752—1833)做出的. 他开始重新考虑按照某一特殊三角形的内角和是等于、大于或小于两个直角做出的三个不同的假定. 他隐含地承认直线的无限性,因而能取消第二个假定,但是,尽管他作了种种尝试,还是没法排除第三个假定, 他的第一次努力由于假设单位长的选择将不影响其命题的正确性而成为无效的, 但是, 这等

价于假设存在相似非全等图形.第二次尝试由于假设过三个不共 线的点可作一圆,结果也成为无效的.后来,勒让德独立地看出 兰伯特已经发现的事实,即在第三个假定下,三角形的内角和小 于两个直角的亏量与三角形的面积成正比.于是,勒让德推论: 如果我们能从任何已知的三角形开始得到包括至少两个已知三角 形的另一个三角形,则新三角形的亏量至少二倍于已知三角形的 亏量.重复此程序足够多次,我们最终会得到一个三角形,其内 角和为负的,这是荒谬的.但是,为了解决得到包括两个已知三 角形的一个三角形的问题,勒让德假定:过小于60°的角内一点 总能作一直线交该角之两边,则正如我们早已指出过的,这个假 定等价于欧几里得第五公设。

勒让德的关于平行线的最后论文发表于1833年,也就是他逝世那年。他也许在试图证明此著名公设方面保持了坚持到底的记录。实际上,勒让德比他早一百年的萨谢利并没有多大进展。而且在他的最后论文发表之前,一位俄国数学家由于距离和语言的障碍独立于科学世界的这一方,迈进了有很重要意义的一步,其大胆和重要性远远超出勒让德在此课题上所做的一切。

在结束本讲之前,让我们再说一件关于勒让德的事。他为了证明平行公设所做的大量的、多种多样的努力,发表在他的很受欢迎的《几何学基本原理》(Éléments de géométrie)一书的一系列版本中,从 1794 年的第一版到 1823 年的第十二版。在这部著作中,他对欧几里得《原本》作了教学法上的改进。《重新排列和简化了许多命题,这部著作在欧洲大陆赢得了很高的评价,并且美国很乐意地接受了它,成为其初等课本的原型。直到最近,美国的每一个学几何课的学生还靠勒让德著作的某种译本学习几何学。第一个英文译本出自美国,是哈佛大学的J. 法勒(Farrar)于 1819年译出的。第二个英文译本是著名的苏格兰文学家 T. 卡莱尔(Carlyle)于1822年译出的,他早年担任中学数学教师。卡莱尔的译本在美国出了三十三版。因为勒让德的证明平行公设的工作被

写成如此简单和直接了当的形式,并发表于其被广泛使用的《几何学》中·由于勒让德的工作,第五公设受到普遍的关注·总之,勒让德的小几何书的影响是如此之大:如果我想找一个数学教学法上的重要里程碑,这部著作的出版就应该最先当选.

习 颞

- 26.1 试证明普雷菲尔公设和欧几里得第五公设是等价的,
- 26.2 试证明下列陈述中的每一个与普雷菲尔公设等价:
- (a) 如果一条直线与两条平行线之一相交,它必定与另一条 也相交.
 - (b) 平行于同一直线的各直线彼此平行,
- 26.3 以"如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角相等,则第三个角也彼此相等"这个假定代替欧几里得的第五公设,证明。三角形的内角和等于两个直角。
- 26.4 试找出下列的由B. F. 蒂鲍特(Thibaut)于1809年给出的欧几里得第五公设的"证明"之谬误:令直角之边与 △ABC 之 CA边重合.令直尺依方向ABC相继地绕A、B、C三个顶点旋转,使得它顺次与AB、BC、CA重合.在该直尺转到其原来位置时,它必定转过了四个直角.但是,全部转动是由等于该三角形的外角的三次转动组成的.于是得出:三角形的内角和必定等于两个直角,并由此推出欧几里得的平行公设.
- 26.5 试找出下列的由J. K. F. 豪夫(Hauff)于 1819年给出的欧几里得第五公设的"证明"之谬误:令AD、BE、CF为等边三角形ABC之高,并且令O为这三个高的共同点。在直角三角形ADC中,锐角CAD等于锐角ACD的一半。所以,在直角三角形AEO中,锐角OAE等于锐角AOE的一半。对于以△AEO为典型的六个小直角三角形中的每一个,此陈述同样保持。于是,推出:三角形ABC的内角和等于O周围的角的一半,即等于两个直角。但

- 是,我们知道:存在一个三角形其内角和等于两个直角,就为欧几里得第五公设提供了充分保证:
- 26.6 用简单的全等定理(它们不需要平行公设(证明下列的 关于等腰双直角四边形的定理:
 - (a) 等腰双直角四边形的两个顶角彼此相等,
- (b) 等腰双直角四边形的顶边和底边的中点联线既垂直于其底边也垂直于其顶边,
- (c) 如果从一个三角形的底边的端点,向其两腰中点联线作 垂线,就形成一个等腰双直角三角形,
- (d) 等腰双直角四边形的相等的边的中点联线垂直于其顶点 和底边的中点联线。
- 26.7 锐角假定实际上假定了: 等腰双直角四边形的彼此相等的顶角是锐角, 或, 三直角四边形的第四 个 角 是锐角. 在下面, 我们将以锐角假定为前提:
- (a) 令ABC为任一直角三角形,并且令 M 为 其斜边上的中点. 在A点作 $\angle BAD = \angle ABC$. 从M点作MP垂直于CB. 在AD上截AQ = PB,并且,作MQ. 证 明 $\triangle AQM \cong \triangle BPM$,然后证明, $\angle AQM$ 是直角并且Q、M、P三点共线. 于是,ACPQ是在A点处有锐角的三直角四边形. 于是,证明. 在锐角假定下,任一直角三角形的内角和小于两个直角.
- (b) 令 $\triangle ABC$ 的 $\angle A \ge \angle B$ 或 $\ge \angle C$. 过A点作高,并且,根据(a)证明。以锐角假定为前提,则任一三角形的 内 角和小于两个直角。
- (c) 考虑三个角都彼此对应相等的两个三 角 形。 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$. 如果,A'B'=AB,则这两 个 三 角 形 全等。假定 A'B'<AB. 在AB上截AD=A'B',并且在AC上截AE=A'C'.则 $\triangle ADE\cong\triangle A'B'C'$.证明E不能落在C上,因为,那样, $\angle BCA$ 就会大于 $\angle DEA$. 再证明E不能落在 AC 的延长线上,因为,那样,BE 种,BE 就会者 BC 于 BE 点并且AE 的内角和就会超过两个直

角. 所以,E落在A与C之间,并且,BCED是 凸四边形. 证明此四边形的内角和等于四个直角. 但是,承认锐角假定的话,这是不可能的. 于是,推出. 我们不能有A'B' < AB,并且,以锐角假定为前提,则任一三角形的内角和小于两个直角. 换句话说,在由锐角假定推出的几何中,不存在不同大小的相似形.

- (d) 联接一个三角形的一个顶点和其对边上一点所得线段被称做塞瓦(cevian). 一条塞瓦分一个三角形为两个子三角形, 其每一个又可以类似地划分, 等等,证明: 如果一个三角形象上述的那样分为有限多个子三角形, 原三角形的亏量等于这么分下的所有三角形的亏量的和.
- 26.8 试证明:三直角四边形可被看作等腰双直角四边形的一半.
- 26.9 为了达到取消锐角假定的目的,勒让德试图在此假定下得到包括至少两个已知三角形的三角形,令 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 不大于其余两个角中的一个。在 BC 边上作 $\triangle DCB\cong\triangle ABC$,其 $\angle DCB=\angle B$,其 $\angle DBC=\angle C$ 。过D作任一直线截AB 和AC的延长线于E和F。于是, $\triangle AEF$ 包括至少两个 $\triangle ABC$ 。

试证明此作图假定,过小于60°的已知角内 一点总可作一直 线交该角的两边。

- 26.10 已知球的球面度指的是等于球的全部表面积的1/720的任何一块球面,一个球面三角形的球面角盈指的是。该三角形的内角和(以度计)超过180°的部分。
 - (a) 试证明: 角为n°的弓形的面积等于2n球面度.
- (b) 试证明: 球面三角形的面积以球面度计,等于该三角形的球面角盈的量.
- (c) 试证明: 球面角盈为E°的球面三角形的面积A由下式给出

$$A = \frac{\pi r^2 E^{\circ}}{180^{\circ}},$$

在这里, r是该球的半径, 这表明: 对于一个给定的 球, 球面三角形的面积与其球面角盈成正比,

参考文献

BELL, E. T., The Magic of Numbers. New York: McGraw-Hill, 1946.

GANS, DAVID, An Introduction to Non-Euclidean Geometry. New York: Academic Press, 1973.

HALSTED, G. B., Girolamo Saccheri's Euclides Vindicatus. Chicago: Open Court, 1920.

SMITH, D. E., A Source Book in Mathematics. New York; Dover, 1958.

WOLFE, H.E., Introduction to Non-Euclidean Geometry. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1945.

第 27 讲

几何学的解放(二)

在前一讲中,我们看到:尽管经过长时间的艰苦的努力,萨谢利、兰伯特和勒让德还是没能以锐角假定为前提推出矛盾。在此假定下找不到矛盾,没什么可惊讶的,因为正如我们现在知道的:由某一组基本假定加上锐角假定推出的那套几何,和由同样的一组基本假定加上直角假定推出的欧几里得几何一样,是自相容的.换句话说,正如我们现在知道的:平行公设不能作为定理从欧几里得几何的其它假定推出,它是独立于其它那些假定的。对于受两千年来传统偏见的约束,坚信欧几里得的几何无疑是唯一的可靠的几何,而任何与之矛盾的几何系统绝对不可能是相容的人来说,承认这样一种可能性,是要有不寻常的想象力的。

最先猜测平行公设具有独立性的是德国的C·F·高斯(Gauss,

1777—1855),匈牙利的 J·鲍耶和俄国的N·I·罗巴切夫斯基(Lo-bachevsky,1793—1856). 他们通过平行公设的普雷菲尔形式,考虑三种不同可能来独立地探讨此课题,三种可能指的是,过已知直线外的一个已知点能作正好一条,不能作,或能作多于一条直线平行于已知直线. 这三种情况分别与直角假定、链角假定和锐角假定等价. 同他们的先驱者的做法一样. 假定直线的无限性,第二种可能易于否定. 然而,在第三种场合找不到矛盾,使得这三位数学家每一位都猜测. 在那个假定下的几何也许是相容的(虽然可能是奇怪的),而且,每一位并不知道另外二位的著作,由于对于这门新几何具有强烈的兴趣从而进行了广泛的研究.

高斯是真正预见到非欧几何的第一人,虽然他对这件事从年轻时候起就作过许多考虑,但是,也许他开始猜测平行公设会独立于欧几里得的共它公设,是在他生命的最后二十年的事,不幸的是,高斯毕其一生,关于此命题没有发表什么见解,并且,我们现在知道他的先进思想也是通过他与好朋友的通信、对别人著作的几份评论,以及在他死后从稿纸中发现的几段礼记,虽然他克制住自己,没有发表自己的发现,但是,他竭力鼓励别人坚持这方面的研究,并且,把这种新几何称为非欧几何的就是他.

显然,预见到非欧几何的第二人是J.鲍耶,他是奥地利军队中的一名匈牙利军官。他是数学家 F. 鲍耶(Bolyai)的儿子,F. 鲍耶与高斯有长期的亲密的友谊。无疑,小鲍耶的这项研究受到他父亲的很大启发,他父亲很早就对平行公设问题感兴趣。早在1823年,J.鲍耶就开始理解摆在他面前的问题的实质,并且,在那年给他父亲写了封信说明他热衷于这项工作。在这封信中,他表示决心抽时间把材料整理好,发表一个论述平行线理论的小册于,并且强调说。"我要白手起家创造一个奇怪的新世界。"他父亲主张。准备提出的小册子应尽快发表,并且帮助他的儿子达到他自己曾为之贡献力量谋求达到的目的,署上他儿子的名,作为他的即将完成的关于初等数学的、半哲学性的两卷大部头著作的附

录发表.思想的扩展和整理进行得很慢,J.鲍耶原来没预计到;但是,最终于1829年,他把完成的手稿交给他父亲;三年以后,于1832年,设想中的小册子作为他父亲的著作的第一卷的二十六页附录发表了³.J.鲍耶关于此课题后来没有再发表什么,但是,他留下了一大堆有关的手稿.

虽然高斯和J.鲍耶被人们承认是最先料想到非欧几何的人,但是,俄国数学家罗巴切夫斯基实际上是发表此课题的有系统的著作的第一人。罗巴切夫斯基一生中的大部分时间是在喀山大学度过的,先是当学生,后来是任数学教授,录后是当校长,并且,他的关于非欧几何的最早论文就是于1829—30年在《喀山通讯》上发表的,比鲍耶著作的发表早二到三年、这篇学术论文在俄国没有引起多大注意,并且,它是用俄文写的,实际上在别处也没受到注意。罗巴切夫斯基在他最初的工作的基础上还发表了一些东西。例如,他为了得到广泛的读者,于1840年用德文写了一本小书,标题为《关于平行线理论的几何研究》(Geometrische Unterschungen zur Theorie der Parallellinien)》,并且,更迟些时,于1855年(死前一年,失明以后),他用法文发表了标题为《泛几何》(Pangéométrie)3)一书的最后缩写本。

在那些年代,新发现的信息的传播是如此之 慢,以致在 德文本发表之前,高斯也许还没有听说过罗巴切夫斯基的著作,而 J.鲍耶恐怕在1848年之前也不知道这事.罗巴切夫斯基本人没能看到他的著作受到广泛承认,但是,他发展的非欧几何现今常被称做罗巴切夫斯基几何,并且,他赢得了"几何学上的哥白尼"的称号.

在罗巴切夫斯基和鲍耶的著作发表后若干年,整个数学界才

¹⁾ 此附录的译文, 参看D. E. Smita著A Source Book in Mathematics.

²⁾ 其译文发表于R. Bonola著Non-Euclidean Geometry: A Critical and Historical Study of Its Development.

³⁾ 其译文可参看D. E. Smith, A Source Book in Mathematics.

对非欧几何这个课题给予更多的注意,并且,在几十年后,此发现的真正内涵才被理解.一项进一步的认识首先得到了。即证明新几何的内在相容性.虽然,罗巴切夫斯基和鲍耶在他们对于以锐角假定为基础的非欧几何的广泛研究中没有遇到矛盾,虽然,他们甚至相信,不会产生矛盾;但是,仍然保留这种可能性.如果这类研究充分地持续下去,会出现矛盾或不相容.平行公设对于欧几里得几何的其它公设的现实的独立性,无疑,要在锐角假定的相容性证明做出之后才能成立.这些,没有多久就做到了,那是贝尔特拉米,凯利,F.克莱因,庞加莱等人的工作.办法是在欧几里得几何内建立一个新几何的模型,使得锐角假定的抽象发展在欧几里得空间的一部分上得到表示.于是,非欧几何中的任何不相容性会反映此表示的欧几里得几何中的对应的不相容性.此证明是相对相容性的一种,罗巴切夫斯基的非欧几何被证明是相容的,如果欧几里得几何是相容的,当然,每个人都相信欧几里得几何是相容的.

罗巴切夫斯基的非欧几何的相容性的一个结果是古老的平行公设问题的最终解决。相容性确立了下列事实,即平行公设独立于欧几里得几何的其它假定,并且,它证明了把此公设当作定理由其它那些假定推出的可能性是不存在的。因为如果此平行公设能被推出,则这个与罗巴切夫斯基平行公设矛盾的结果会在非欧几里得体系中构成不相容。

但是,非欧几何的相容性还有一些后果,远远超过了平行公设问题的解决。其中的一个重要后果是:几何学从其传统的模型中解放出来。几何学的公设,对于数学家来说,仅仅是假定,其物理上的真或假用不着考虑,数学家可以随心所欲地选取公设,只要它们彼此相容。当数学家采用公设这个词时,并不包含"自明"或"真理"的意思。有了发明纯粹"人造的"几何的可能,物理空间必须被看作是由我们的外来经验导出的经验概念,被指定用来描述物理空间的几何学的公设就是此经验的表述,就象物理科学

的定律一样:都成为显然的了,欧几里得平行公设,就其试图解释现实空间而言,和伽利略的落体定律具有同类型的有效性,即它们都是在实验误差的限度内可证实的观察的定律.

几何学在应用于现实空间时是经验科学或应用数学的一个分支这种观点,是与发现罗巴切夫斯基几何的年代统治哲学思想的康德的空间理论相抵触的·康德的理论宣称:空间是已经直觉地存在于人脑中的框架,欧几里得几何的公理和公设是强制给人脑的先验判断,没有这些公理和公设,关于空间的相容推理就不可能进行·由于罗巴切夫斯基几何的发明,无可争辩地证明:此观点是站不住脚的·

事实上,罗巴切夫斯基几何的相容性不仅解放了几何学,对于整个数学也有类似的影响,数学显现为人类思想的自由创造物,而不是受我们自己生活于其中的世界摆布的什么事物,关于这件事,还是E.T.贝尔(Bell)说得好:

小说家虚构性格、对话和场合,他既是其虚构对象的作者又是其主人,数学家随心所欲地设计公设,他把他的数学体系奠基于其上:小说家和数学家简直是以同样方式工作的.小说家和数学家在选择和处理他们的素材方面也许要受到他们的环境的制约;但是,绝不是受什么超人的永恒的必然性的驱使去创造某性格或发明某体系的.¹⁾毁掉传统的信念,破除于百年来的思想习惯,非欧几何才破土而出,它对于数学的绝对真理观点来说是一场暴风.用G. 康托尔(Cantor)的话说,"数学的本质在于其自由".

最后,我们看到:很长时间以前希腊人创始的实质公理学的模式,现在需要来一次重大的改革以适应数学的一个分支的新构思,公理学上的这个重大转变本身就是数学史上的一个里程碑,我们将在后面讲它,

¹⁾ E. T. Bell, The Deur poment of Mathematics, p 330.

我们已经看到: 钝角假定被所有在此课题上探索过的人所抛弃, 因为它与直线无限长的假定相矛盾. 认出以钝角假定为基础的第二种非欧几何, 是德国数学家G. F. B. 黎曼(Riemann, 1826—1866)在1854年讨论无界和无限概念时得到的成果。虽然欧几里得的公设2断言: 直线可被无限延长, 但是, 并不必定蕴涵直线就长短而言是无限的, 只不过是说: 它是无端的或无界的。例如, 连球上两点的大圆的弧可被沿着该大圆无限延长, 使得延长了的弧无端, 但确实就长短而言它不是无限的. 现在我们可以设想: 一条直线可以类似地运转, 并且, 在有限的延长之后, 它又回到它本身. 由于黎曼把无界和无限的概念 分辨 清了, 可以证明, 人们能实现满足钝角假定的一种内相容的几何, 如果欧几里得的公设1, 2和5(它们已被列在第8讲中, 为了方便起见, 重写于本讲附录中)作如下修正的话:

- 1', 两个不同的点至少确定一条直线,
- 2'. 直线是无界的.
- 5'. 平面上任何两条直线都相交.

这第二种非欧几何通常被称做黎曼非欧几何.

仔细地读欧几里得的公设1和2,就会知道:它们实际上说的正好是公设1′和2′所说的意思,虽然欧几里得曾赋予它们较多的涵义.他赋予公设1由两点确定直线的唯一性,赋予公设2直线的无限性,是为了他在这些意义上采用这两条公设,但是他对这两条公设的陈述并没有真正说那么多.

由于罗巴切夫斯基的和黎曼的非欧几何的发明,几何学从其传统的束缚中解放出来了,从而为大批新的、有趣的几何的发明开辟了广阔的道路,这些新的几何的公设基础都与欧几里得几何的公设基础有这样那样的区别,这些新几何是,非阿基米德几何,非笛沙格几何,黎曼于1854年开始讨论的一整套黎曼几何,非黎曼几何,有限几何(它只包含有限多的点、线和面),和许许多多。这些新几何看来并不是毫无用处的。例如,爱因斯坦发现

在其广义相对论的研究中,必须用一种非欧几何来描述这样的物理空间——它是上面说的黎曼几何的一种。再则,由1947年对视空间(由正常的双目视觉的人心理上观察到的空间)所做的研究得出结论。这样的空间最好用罗巴切夫斯基非欧几何⁵来描述。其它的例子就不多讲了。

罗巴切夫斯基的和黎曼的非欧几何的具有解放意义的发现,肯定应列为数学史上最重要的一个里程碑,并且我们可以理解,C. 凯泽(Keyser)为什么认为,欧几里得的平行公设"也许是科学史上最重要的一句话。"²⁾

黎曼1854年作见习讲演的事,肯定是关于他的最有趣的故事之一.他必须通过这次见习讲演,才能被指定担任哥廷根大学的无报酬的讲师职位.按照惯例,他必须提出三个不同的讲演题目,让学校教授会从中选一个.黎曼希望学校教授会按一般情况办,从所提出的题目中选第一个,或者可能选第二个,并且,尽力为这两种可能做准备,而对于不大引人注意的第三个题目几乎没花时间去考虑.

其第三个题目是《关于几何学基础的假定》,(Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen),它与高斯六十多年来曾深思熟虑过的一个课题有关。高斯好奇地想听听黎曼这位杰出的年轻人关于此课题会说些什么;正因为如此,高斯指定第三个题目要黎曼讲。于是,黎曼经过紧张的最后时刻的准备,出席哥廷根的教授会;他的第三个报告就这样问世了。这篇讲演,无论就数学还是就文笔来说,都是杰作。它改革了几何学的研究,并且因此被认为是整个数学史上以这样短的篇幅写出来的内容最丰富的文章。为了使出席教授会的非数学家们不泄气能听下去,删去了不好懂的技术细节,黎曼在这篇论文中抛出了许多新

¹⁾ R. K. Luneberg. Mathematical Analysis of Binocular Vision. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1947.

²⁾ C. J. Keyser, Mathematical Philosophy, p. 113.

的富有成果的概念,这些概念受到在那以后直到现在的研究者们 的关注.

黎曼在其讲演的结论性意见中,对于他提交了这样一个表面 上看来无用的课题表示歉意,但是,他说,这样一种研究的价值也 许在于使我们能从先入之见中解放出来,需要用某种不同于欧几 里得几何学的几何学来研究物理定律的日子必将来到,这些预见 在他死后五十年,由于有了爱因斯坦的广义相对论而确实实现了.

附 录

为了便于参考,我在这里重新列出欧几里得《原本》的五条公设。

- 1. 联接任何两点可作直线.
- 2. 直线可循其任何方向不断延长.
- 3. 以任一点为圆心过任一第二点可作一圆.
- 4. 所有直角彼此相等,
- 5. 若一直线与两直线相交,且若同侧所交两内角之和小于两直角,则两直线无限延长后必相交于该侧的一点。

习 题

- 27.1 在欧几里得平面上取一固定圆 Σ ,并且,把罗巴切夫斯基平面解释为 Σ 的内,罗巴切夫斯基平面的"点"为 Σ 内的欧几里得点,罗巴切夫斯基平面的"线"为欧几里得线被包括在 Σ 内的部份,在此模型中证实下列陈述。
 - (a) 两个不同的"点"确定一条且仅确定一条"线",
 - (b) 两条不同的"线"至多交于一"点"。

¹⁾ 黎曼论文的译文, 可参看D. E. Smith. A Source Bvok in Mathematics.

- (c) 过m"线"外的P"点"可作无穷多"线"不与m"线"相交.
- (d) 令由"点"P和Q确定的欧几里得线交 Σ 于S和 T,次序是 S, P, Q, T.让我们把从P到Q的罗巴切夫斯基"距离"解释为 $\log [(QS)(PT)/(PS)(QT)]$
- 如果P, Q, R是一条"线"上的三"点",试证明: "距离"PO+"距离"OR="距离"PR
- (e) 令"点"P被固定,并且,令"点"Q沿着过P的定"线"向T移动,试证明,"距离" $PQ \longrightarrow \infty$.

此模型是F. 克莱因 (Klein, 1849—1929)设计的. 以上述解释, 再以对两"线"间的"角"的适当解释, 能证明. 除了平行公设外所有对于欧几里得几何必要的假定, 在此模型的几何中是真命题. 在(c)中, 我们已经看到. 欧几里得平行公设也不是一个这样的命题, 而罗巴切夫斯基平行公设取代了其地位. 此模型于是证明. 欧几里得平行公设不能由欧几里得几何的其它假定推出, 因为如果它被其它假定蕴涵,则它在此模型的几何中必定是真命题.

- 27.2 让我们把黎曼非欧平面解释为已知球S的表面,黎曼平面的"点"为S上的点,黎曼平面的"线"为S上的大圆.证明.本讲正文中的公设1′,2′,5′,连同欧几里得公设3和4,在此模型中保持,并用以证明黎曼非欧几何的(相对)相容性.
- 27.3 考虑下列的关于某些称做"dabba"的对象 和 某些称做 "abba"的dabba的集合的公设集:
 - P1 每一个abba是一组dabba.
 - P2 存在至少两个dabba.
- P3 如果p和q是两个dabba,则存在一个且仅存在一个既包括p又包括q的abba.
 - P4 如果L是一个abba,则存在一个dabba不属于L.
- P5 如果L是一个abba,并且p是不属于L的 dabba,则存在一个且仅存在一个包括p而不包括任何属于L的dabba的abba。

- (a) 为此公设集设计一个模型(或解释),证 明: P3不能从此公设集的其余的公设推出。
- (b) 为此公设集设计一个模型(或解释),证明: P5不能从此公设集的其余的公设推出。
- (c) 把"abba"解释为"直线","dabba"解释为"点",重述这些公设、注意、这么一来,P5成了普雷菲尔公设。
- 27.4 证明: 在黎曼非欧几何中, 所有在已知 直线m同侧的 垂线都交于O点, 从O点到直线m的垂线长都彼此相等, 并且, 此公共长与在此平面上选哪条直线为直线m无关.
 - 27.5 在球面几何中,证实下列的平面黎曼非欧几何的定理:
- (a) 在直线m的同侧的所有垂线交于一点O, 从O点到直线m的这些垂线的长彼此相等,并且,此公共长(称它为 q)与在此平面上选哪条直线为线m无关。
- (b) 如果 A, B, P 为线 m 上 的 任 何 三 点, 则 AP:AB= ∠AOP: ∠AOB
 - (c) 所有直线为有限长,并且有同样的长4q.
- (d) 如果一个三角形的三个角与另一个三角形的三个角彼此相等,则两个三角形是全等的.
- 27.6 由于空间和物质的明显的、不可解脱的纠缠,不可能以天文学的方法确定物理空间是欧几里得的,还是非欧几里得的.因为所有的测量都既包含物理的又包含几何的假定,只要对我们假定的空间和物质的性质作适当的调整改变,一个观察结果就可以用许多不同方式解释.例如,很可能.对三角形内角和的观察差异可被解释为,保持欧几里得几何的假定但同时修正某物理定律(比如说,某光学定律).再则,任何这样的差异的消失可以与非欧几何的假定相容,而辅之以在我们的关于物质的假定中作某些适当的调整.正因为如此,庞加莱认为.说哪种几何是正确的几何都不恰当.为了使此观点明朗化,庞加莱设计了一个虚字宙Σ,它占有半径为R的球的内,对于它,他假定下列物理定律保持:

- (1) 在 Σ 内的任何一点P,绝对温度T由公式 $T = k(R^2 r^2)$ 给出,在这里,r是P与 Σ 内的中心的距离,k是常数。
 - (2) 物体的线性维数随物体局部的绝对温度而变,
 - (3) E中所有物体直接假定它们所在局部的温度:
- (a) 证明: Σ 中的居民可能根本不知道上述三条物理定律在 其字宙中保持.
- (b) 证明: Σ中的居民会感到他的宇宙在范围上是无限的,因为,他在取有限的N步(无论N选得多么大)后,总也达不到边界。
- (c) 证明: Σ 中的短程线(联一对点的长度最短的曲线)是弯向 Σ 的中心的曲线、事实上,能证明: 过 Σ 中的A、B两点的短程线是过A、B两点与边界球正交的圆弧或直线、
- (d) 让我们再给宇宙 Σ 加上一条物理定律,假定光线沿 Σ 的 短程线行进,这条件可用物理学的办法实现。在 Σ 中填入在 Σ 的 每一个点有适当的折射系数的气体,然后,证明。 Σ 的短程线,对于 Σ 的居民来说,"看来是直的"。
- (e) 证明: 在Σ的短程线几何中,罗巴切夫斯基平行公设成立,使得,Σ中的居民相信他生活于非欧几里 得 世 界 中·在这里,我们有一块平常的、想象上的欧几里得空间;这空间,由于不同的物理定律,看来象是非欧的·

参考文献

BELL, E. T., Men of Mathematics. New York: Simon & Schuster, 1937.

BONOLA, R., Non-Euclidean Geometry: A Critical and Historical Study of Its Developments, trans. by H. S. Carslaw. New York: Dover, 1955.

KEYSER, C. J., Mathematical Philosophy: A Study of Fate and Freedom. New York: E. P. Dutton, 1922.

SMITH, D. E., A Source Book in Mathematics. New York:

Dover, 1958.

WOLFE, H.E., Introduction to Non-Euclidean Geometry. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1945.

第 28 讲

代数学的解放(一)

在第26讲的开头,我们讲过:在十九世纪上半叶数学史上有两个很重要的转折.第一个是1829年左右非欧几何的发现,在前两讲中已经讨论过了.我们现在来讲第二个,即1843年非常规代数的发现.我们将看到:如同前者使几何学从传统的欧几里得几何中解放出来一样,后者使代数学从传统的实数系代数中解放出来.和前一个场合一样,为了公平地安排历史资料,我们也将用两讲的篇幅.

几何学的解放追本溯源始自古希腊的年代对欧几里得平行公设的批评探讨,代数学的解放则起源于十九世纪上半叶英国数学家们对代数中结构的存在的认知。

我们首先弄清楚代数结构的意义。在学习普通的正整数算术时,人们遇到称做"加法"和"乘法"的两种运算。这两种运算是二元运算,即对于每一有序正整数对(a,b),对应唯一的正整数c与d,它们分别称做a与b的和及a与b的积,并且表示为

$$c=a+b$$
 $= d=a\times b$.

在正整数集上定义的加法和乘法这两种二元运算具有某些基本性质、例如,如果a、b、c、d表示任意正整数,则有

- 1. a+b=b+a, 所谓加法的交换律.
- 2. $a \times b = b \times a$, 乘法的交换律.
- 3. (a+b)+c=a+(b+c), 加法的结合律.
- 4. $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$, 乘法的结合律.

5. a×(b+c)=(a×b)+(a×c),乘法在加法上的分配律。在十九世纪初,代数只不过是被看作符号化的算术。也就是说,不象在算术中那样对具体的数进行运算,在代数中我们采用代表这些数的字母。实际上,这就是在中学甚至在大学一年级讲授代数时所持的观点。

上述五条性质是在正整数代数中总能成立的命题,但是,因为这些命题是用符号表示的,所以可以想象,它们还可以应用于正整数以外的其他元素集合,只要对其中所包含的二元运算给予适当的定义,确实如此,下述例子将充分证实这一点,如果在每一场合我们以 S表示元素的集合,易于证实,其中的元素,在给定的+与×这两种二元运算下,满足所有这五条性质。在每一个例于中,等号在恒等的意义上被采用。

例 子

- (a) 令 S 为所有偶数的集合,并且令 + 与 × 表示通常的正整数的加法与乘法。
- (b) 令 S 为所有有理数(正负整数、正负分数和零)的集合, 并且令+与×表示通常的实数的加法与乘法.
- (c) 令 S 为所有实数的集合,并且令 + 与 × 表示通常的实数的加法与乘法,
- (d) 令S为所有 $m+n\sqrt{2}$ 形式的实数的集合,在这里,m和n是整数,并且,令士与×表示通常的实数的加法与乘法。
- (e) 令S 为高斯整数(复数m+ni, 在这里, m与n是普通的整数, 并且 $i=\sqrt{-1}$)的集合, 并且令+与 \times 为通常的复数的加法与乘法.
- (f) 令 S 为所有有序整数对(m, n)的集合,并且令(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d), (a, b)×(c, d)=(ac, bd).
- (g) 令 S 为所有有序整数对(m, n), 并且令(a,b)+(c,d)=(ad+bc,bd), $(a,b)\times(c,d)=(ac,bd)$.

- (h) 令 S 为所有有序整数对(m,n), 并且令(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d), $(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$.
- (i) 令 S 为实变量 x 的所有实多项式的集合, 并且令+和 × 表示多项式的通常的加法和乘法.
- (j) 令S为定义在闭区间 $0 \le x \le 1$ 上的变量x的所有实值函数的集合,并且令+和 \times 表示这样的函数的通常的加法和乘法.
- (k) 令S为由m和n这两个不同的元素组成的集合,在这里我们定义

$$m+m=m$$
, $m \times n=m$, $m \times n=m$, $m+n=n+m=n$, $m \times n=n \times m=m$, $n+n=n$, $n \times n=n$.

(1) 令 S 为平面上所有点集的集合,并且令 a+b表示点集 a与b的并, a×b表示点集 a与b的交. 作为平面的一个特殊点集,我们引进一个理想集合——空集,在其中没有点.

从上述的例子看,把它们推广是很容易的.显然,正整数的五条基本性质也可看作是许多其它完全不同的元素系统的性质.上述五条性质和它们的推论构成可应用于正整数的代数;但是,很明白,这五条性质和它们的推论也构成可应用于许多其它系统的代数.这就是说,存在属于许多不同系统的共同的代数结构(五条基本性质和它们的推论).五条基本性质可被看作特殊类型代数结构的公设,由这些公设形式地蕴涵的任何定理可应用于上述的每一个例子或满足五条基本性质的任何其它解释.从此观点看,代数与算术的联系被切断,并且,代数成为纯形式的假设——演绎研究.

代数的现代观点的最初闪光出现于十九世纪上半叶的英国,那是由G.皮考克(Peacock, 1791—1858)的著作引起的.皮考克是剑桥大学的毕业生和教师,后来又担任依里大教堂的教长.皮考克是最先认真研究代数学的基础原理的一个人,他于1830年发表其《代

数论著》,在其中他试图对代数作出堪与欧几里得《原本》对几何的 处理媲美的逻辑处理,因而,他赢得"代数的欧几里得"的称号。

皮考克在他所谓的"算术代数"和"符号代数"之间作出区别。在皮考克看来,前者是从利用表示通常的正十进制数的符号,连同对这些数可以进行运算(比如说加法和减法)的符号导出的研究。在"算术代数"中,某些运算是受它们的应用可能性所限制的。例如,在减法 a-b中,我们必须有a>b.另一方面,皮考克的"符号代数"采用"算术代数"中的运算,但没有这些限制。于是,"符号代数"中的减法不同于"算术代数"中的减法,在"符号代数"中,减法总被看成是可应用的。皮考克把"算术代数"中的规则推广到"符号代数"的正当理由称之为等价形式的持久性原则。皮考克的"符号代数"是一种通用的"算术代数"。当两种代数在共同的场合进行时,共运算由"算术代数"的运算确定;在其它场合,依等价形式的持久性原则确定。

在那个时代,等价形式的持久性原则被看作是数学中的强有力的概念,并且,它在复数算术的早期发展和把指数定律从正整数指数推广到更广泛的场合等方面,起到了历史的作用。例如,在指数理论中,如果r是正有理数,并且n是正整数,则按照定义r"为n个r因子的乘积。从此定义立即推出。对于任何两个正整数m和n,r"r"=r"+"。根据等价形式的持久性原则,皮考克断言。在"符号代数"中,不管底r或者指数m和n是什么数,都有r"r"=r"+"。等价形式的持久性原则这条模糊的原则今天已被抛弃,但是,当我们试图推广一个定义去建立一个较一般的定义,使得旧定义的某性质或某些性质仍能保持时,我们仍常受它的引导。

皮考克的英国同辈改进其研究,并且把代数的概念推向前进,使它较接近该学科的现代概念.例如,D.F.格雷戈里(Gregory, 1813—1844)1840年发表了一篇论文*,在其中 清 楚地显

^{*} D. F. Gregory, "On the real nature of symbolic algebra", Transactions of the Royal Society of Edinburgh, 14(1840), 280.

示出代数的交换律和分配律.在代数基础的理解方面的进一步改进,是英国代数学派的另一个成员A. 德·摩尔根(De Morgan, 1806—1871)在十九世纪四十年代作出的.代数结构思想的出现和代数发展中的公设规划的准备,都可以在英国学派的深索性工作中找到痕迹.不久,英国学派的这些思想传播到欧洲大陆,在那里,在1867年,德国数学家和数学史家H. 汉克耳(Hankel, 1839—1873)对它们作了全面的考虑.但是,在汉克耳发表其著作之前,爱尔兰数学家W. R. 哈密顿(Hamiton, 1805—1865)和德国数学家H. G. 格拉斯曼(Grassmann, 1809—1877)就发表了意义深远的成果,这些成果导致代数学的解放,就象罗巴切夫斯基和鲍耶的发现导致几何学的解放那样,并且打开了现代抽象代数的闸门.哈密顿和格拉斯曼的值得注意的工作,真称得上数学史上的里程碑;这作为下一讲的内容.

在讲哈密顿和格拉斯曼引起的代数学的解放之前,出于教学 法的考虑,看来应该暂停,先讲一讲普通中学代数中的现代的公 设集.此结构今天被称为有序域.

域是元素的集合S,在S上具有两个二元运算,在这里用 \oplus 和 \otimes 表示(我们没有必要把它们想象为普通的加法和 乘 法),它们满足下列公设*·等号在恒等的意义上被使用,例 如,a=b 意指a和b是同一元素。

- PI 如果 a 和 b 属于 S, 则 $a \oplus b = b \oplus a$.
- P2 如果 a 和 b 属于 S, 则 $a \otimes b = b \otimes a$.
- P3 如果a,b,c属于 S,则 $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$.
- P4 如果 a, b, c 属于 S, 则 $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$.
- P5 如果 a,b,c 属于 S, 则 $a\otimes(b\oplus c)=(a\otimes b)\oplus(b\otimes c)$ 并且 $(b\oplus c)\otimes a=(b\otimes a)\oplus(c\otimes a)$

^{*} 习惯上把表示二元运算的符号放在进行运算的两个元素之间。

- P6 S 包含一个零元素 z , 使得,对于 S 的任何元素 a , $a \oplus z = a$.
- P7 S包含一个不同于z的单位元素u,使得,对于 S的任何元素a, $a \otimes u = a$.
- P8 对于S 的每一元素a, 存在S 的一个元素 \bar{a} , 使得 $a \oplus \bar{a} = z$.
- P9 如果a,b,c属于 $S, c \neq z$, 并且, $c \otimes a = c \otimes b$ 或 $a \otimes c = b$ $\otimes c$, 则a = b(这都是 \otimes 运算的消去律).
- P10 对于 S中的每一元素 $a \neq z$,存在S 的一个元素 a^{-1} ,使 得 $a \otimes a^{-1} = u$.

如果在以上十条公设之外再添上下列两条,则那种域称为有序域.

- P11 存在集合S的一个不包含z的子集P,使得。如果 $a \neq z$,则在a和a中有一个且仅有一个属于P.
- P12 如果 a 和 b 属于 P,则 $a \oplus b$ 和 $a \otimes b$ 属于 P.

定义 P的元素被称做S的正元素,S的所有其它非零元素被称做S的负元素。

定义2 如果a和b是S的元素,并且,如果 $a \oplus b$ 是正的,则我们写 $a \otimes b$ 和 $b \otimes a$.

如果只为了下一讲用,列出域的这么庞大的公设集就有点多余,例如,考虑到公设P2,公设P5中的分配律有一个就行了.另外,还能证明,公设P1和公设P9全都是多余的,注意,正整数五条基本性质表现为上述的公设P1,P2,P3,P4和P5.

上述有序域的12条公设构成初等代数的公设集,从这些代数推导初等代数会是一项有启发性的(虽然也许是冗长的)工作,对于中学水平的人(初等代数是第一次学)讲这样的推导也许太抽象,怕的是"欲速则不达".

让我们再列举两个定义,

定义3 S的元素a被称做S的非空集合N的上界,如果对于

M的每一元素m,有m⊗a或m=a.

定义4 S的元素 a 被称做S的非空集合M的最小上界,如果 a是M的上界,并且当b是M的另一个上界时,a $\bigotimes b$.

现在我们把满足下列公设的有序域定义为全序域。

P13 (连 续性公设)如果S的元素的非空 集合M有上界,则它有最小上界。

有趣的是:全序域的公设构成初等微积分的公设集,在这样一种处理中,任何在其证明中不用P13的定理均可被接受,因为这样一个定理正好属于初等代数.需要P13的那些定理的证明会被仔细地完全给出;这些是微积分的重要定理.顺着这条思路作出的初等微积分的公设处理已在大学一年级的水平上成功地给出了*、

习 题

- 28.1 在(a)所有整数的集合,(b)本讲例(1)中,是 否 符合加法运算在乘法运算上的分配律?
- 28.2 相继地利用结合律、交换律或分配律,把下列的每一个等式的左边的元归约为右边的元,按照习惯,乘法在这里有时用点(·)表示,有时只把因子并置。
 - (a) $5(6+3)=3\cdot 5+5\cdot 6$.
 - (b) $5(6 \cdot 3) = (3 \cdot 5)6$.
 - (c) $4 \cdot 6 + 5 \cdot 4 = 4(5+6)$.
 - (d) a[b+(c+d)]=(ab+ac)+ad.
 - (e) a[b(cd)] = (bc)(ad).
 - (f) a[b(cd)] = (cd)(ab).

^{*} 关于这类处理,参看 E. G. Begle, Introductory Calculus wich Analytic Geometry. Holt. Rinehart and Winston, 1954.这是只有三百来页的比较精巧的微积分课本。

- (g) (ad+ca)+ab=a[(b+c)+d].
- (h) a + [b + (c+d)] = [(a+b) + c] + d.
- 28.3 实际地证明本讲例(a)到(l)满足本讲所考虑的五条基本性质.
 - 28.4 对于任一个域S建立下列定理,
- (a) 如果 $a \oplus z = a$ 并且 $a \oplus z' = a$ 对于S的所有元素a,则z = z' (此证明零元素是唯一的).
- (b) 如果a,b,c是S的元素,并且,如果 $a \oplus b = a \oplus c$,则b = c [这是 \oplus 运算的(左)消去律〕.
- (c) 已知S的两个元素a和b,则存在S的一个唯一元素x,使得 $a \oplus x = b$ (此证明在域中"减法"总可能进行).
 - (d) 如果a是S的任一元素,则 $a \otimes z = z$.
 - (e) 如果 $a \cap b \in S$ 的任何两个元素,则 $a \otimes b = a \otimes b$.
- (f) 如果a和b是S的元素,并且如果 $a \otimes b = z$,则或 a = z或b = z.
- (g) 已知S的两个元素a和b, $a \neq z$,则存在S的一个唯一元素x,使得 $a \otimes x = b$. [此证 明在域中"除法"(不以零为除数)总可能进行〕.
 - (h) 证明 $\overline{a} \otimes b = a \otimes \overline{b} = \overline{a \otimes b}$.
 - 28.5 对任何有序域S证明下列定理:
 - (a) 如果a是S的一个正元素,则a是负元素.
 - (b) S的元素a是正的,当且仅当 $a \otimes z$.
 - (c) S的元素a是负的, 当且仅当a⊗z.
- (d) 如果a和b是S的两个不同的元素,则,或a $\bigcirc c$,或a $\bigcirc b$,但不会二者同时成立。
- (e) 如果a, b、c是S的元素,并且,如果 $a \bigcirc b$ 并且 $b \bigcirc c$,则 $a \bigcirc c$.
 - (f) 如果 $a \otimes b$, 并且 $c \in S$ 的任一元素,则 $(a+c) \otimes (b+c)$.
 - (g) 如果 $a \otimes b$ 并且c是正的,则 $(a \otimes c) \otimes (b \otimes c)$.

- (h) 如果 a 和 b 是 S 的正元素,则(1) $a \otimes \bar{b} = \bar{a} \otimes b =$ 负元素 $\overline{a \otimes b}$. (2) $\bar{a} \otimes \bar{b} = \bar{c} \times \bar{c} \times \bar{b}$.
 - (i) 如果 $a\neq z$ 是S的一个元素,则 $a\otimes a$ 是正的.
 - (j) 元素u是正的.
- 28.6 证明:有至少两个复数的集合,在其中,任何两个数的和、差、积及容许商仍在此集合中,在二元运算+和×下构成一个域。(这样一个域被称做数域,正是由于这个原因,应用于数的普通的加法、减法、乘法和除法,有时被称做四种域运算。)
 - 28.7 由本讲的从公设P2到P10(除P9外)推导出公设 P9.
 - 28.8 在本讲的例(a)到(1)中, 哪几个是域的例子,

参考文献

BEGLE, E.G., Introductory Calculus with Analytic Geometry, New York: Holt, Rinchart and Winston, 1954.

PEACOCK, George. A Treatise on Algebra, New York: Scripta Mathematica, 1940.

第 29 讲

代数学的解放(二)

正如在第27讲中讲过的,长期以来,几何学一直拘泥于欧几里得形式,直到1829年和1832年罗巴切夫斯基和鲍耶创造了另一种几何学(在其中,欧几里得第五公设不再成立、但仍然是相容的)之后,这一学科才从其传统的束缚当中解放出来。由于有了这个成果,只可能有一种几何学这个千百年来植根很深的信念动摇了,创造许多新的、不同的几何的路子打开了。

关于代数学,也有类似的故事,对于十九世纪初的数学家,

要说存在不同于普通的算术代数的另一种代数,简直是不可理解。例如,试图构造一套自相容的代数,其中乘法的交换律不保持,对那个时代的任何人来说,不仅不可能,而且简直是开玩笑;说有一种逻辑代数,在其中a×b不等于b×a,这怎么可能?W.R.哈密顿(Hamilton)生活于那个时代,当然也承受着关于代数的这个信念的压力;但是,在1843,出于实际的考虑,他发明了一种不符合乘法交换律的代数。抛弃交换律这个根本性的一步,对于哈密顿来说,得来不易,他是在对特殊问题作了多年的深思熟虑之后才果断地采取的。

要讲哈密顿创造的实际背景,离我们的主题太远.从哈密顿把复数看作实数对的天才处理开始,也许较为合适;1833年哈密顿在爱尔兰皇家学会(Royal Irish Academy)上首次发表这一思想.他那个时代的数学家们(事实上今天在大学一年级学数学的学生们还是那样)都是这样看待复数的。它是 a+bi 这样的混杂数,在其中, a和b是实数,而i是使得i²=-1的一种非实数,对这些数进行加法和乘法运算时,把每一复数当作i的线性多项式,每当出现i²时以-1代替之.于是,我们得到;对于加法,

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

对于乘法,

$$(a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bdi^{2}$$
$$= (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

这些结果应该作为复数对的加法和乘法的定义,不难证明,加法和乘法符合交换律和结合律,并且,乘法符合加法上的分配律.

由于复数a+bi完全由a和b两个实数确定, 哈密 顿就直截了当地、 没有歧义地以有序实数对 (a, b) 表示此复数. 他定义: (a, b)与(c, d)这两个实数对为相等的,当且仅当a=c并且b=d. 为了与上述结果一致,他把这样的数对的加法和乘法定义为:

$$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d)$$
 和
 $(a, b)(c, d)=(ac-bd, ad+bc).$

用这些定义容易证明,有序实数对的加法和乘法符合交换律和结合律,并且乘法符合加法上的分配律,只要我们假定这些定律对于实数的普通加法和乘法成立(这是当然的).事实上,假定实数在普通的加法和乘法下满足域的所有公设(如同上一讲中给出的),我们就能证明,哈密顿的有序实数对在其加法和乘法的定义下也满足域的所有公设。

应该指出。实数系被嵌入复数系中。这指的是。如果每一实数r等同于对应的数对(r, 0),则此对应关系在复数的 加法和乘法下保持不变,因为我们有

(a, 0) + (b, 0) = (a+b, 0)和(a, 0)(b, 0) = (ab, 0). 实际上,由此得出。(r, 0)形式的复数与实数r对应。

为了把一个复数从哈密顿的形式推导出其 旧 形 式, 我们指出, 任一复数(a, b)可被写为

(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi, 在这里,(0, 1)以符号i表示,(a, 0)和(b, 0)对应于实数a和b. 最后,我们知道

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

以前笼罩在复数上的神秘的气氛已被排除, 因 为 关 于有序实数 对,一切都十分清楚,没什么不可理解的,这是哈密顿的伟大贡献。

复数系对于研究平面上的向量和转动 是 很 方 便 的 一 种 数 系*.哈密顿试图设计一种类似的数系以研究三维空间的向 量 和 转动.在其研究中作出这样的考虑.不是把实数嵌入 有 序 实 数 对 (a, b)中,而是把实数和复数都嵌入有序实数四元数组 (a, b, c, d)中,换句话说,定义(a, b, c, d)和(e, f, g, h)这样 两个四元数组为相等的,当且仅当a=e, b=f, c=g, d=h.哈

^{*} 之所以方便就在于,如果我们把复数z = a + bi沿作是有笛卡儿直角坐标 (a, b)的点Z的一种表示,则复数z也可以看作是向最OZ (在这里,O是坐标原点)的一种表示。

密顿发现,他为有序实数四元数组的加法和乘法下的定义必须满 足

$$(a, 0, 0, 0) + (e, 0, 0, 0) = (a+e, 0, 0, 0),$$

$$(a, 0, 0, 0)(e, 0, 0, 0) = (ae, 0, 0, 0),$$

$$(a, b, 0, 0) + (e, f, 0, 0) = (a+e, b+f, 0, 0),$$

$$(a, b, 0, 0)(e, f, 0, 0) = (ae - bf, af + be, 0, 0)$$

哈密顿称这样的有序实数四元数组为(实)四元数.他发现。为了 多种目的必须为其四元数的加法和乘法作如下定义。

(a, b, c, d) + (e, f, g, h) =
$$(a+e, b+f, e+g, d+h)$$

(a, b, c, d) (e, f, g, h) = $(ae-bf-cg-dh, af+be+ch-dg, ag+ce+df-bh$

$$ah + bg + de - cf$$
).

可用这些定义证明:实数和复数被嵌入四元数中,并且,如果我们令四元数(m, 0, 0, 0)代替实数m,则

m(a, b, c, d) = (a, b, c, d) m = (ma, mb, mc, md). 还可以证明四元数的加法符合交换律和结合律,并且,四元数的乘法符合结合律和加法上的分配律、考虑一下 (0, 1, 0, 0)和 (0, 0, 1, 0)这两个四元数,就发现

$$(0, 1, 0, 0)(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 1),$$

丽

$$(0, 0, 1, 0)(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, -1)$$

= $-(0, 0, 0, 1)$;

即乘法的交换律不成立.事实上,如果我们以符号1,i,j,k分别表示四元单位(1,0,0,0),(0,1,0),(0,0,1,0),

关于哈密顿抛弃乘法交换律思想的产生有个故事,说是他经过十五年无效的沉思之后,在接近黄昏的时候和他妻子在靠近都柏林的皇家运河边散步时的一闪念.这个思想的违反传统观念给予他很大震动,他取出削铅笔刀来把此乘法表的要旨刻划于布鲁哈姆桥的一块石头上,今天,在该桥的这块石头上镶嵌着一块水泥板,上面有关于这个故事的记载。

1843年10月16日 哈密顿爵士曾散步 于此,关于四元数 乘法的基本公式(i²=j² = k²=ijk=-1)的天 才发现来源于那时的一闪念。 他还将它刻于此桥的一块石头上。

这是值得纪念的数学史上的里程碑.

我们能把四元散(a, b, c, d)写成a+bi+ej+dk这种形式. 把两个四元数写成了这种形式,就可以把它们当作 i, j, k 的多项式来进行乘法运算,然后借助于上列的乘法表把所得的乘积归结为同样形式.

1844年,H.G.格拉斯曼(Grassmann)发表其名著《张量演算》 (Ausdehnungslehre)的第一版,在其中他发展了好几套比哈密顿的四元数代数更具有一般性的代数.格拉斯曼不是考虑正好四个实数的有序集合,而是考虑n个实数的有序集合.格拉斯曼把每一

个(x₁, x₂, ···, x_n)这样的集合与x₁e₁+x₂e₂+···+x_ne_n(在这里, e₁, e₂, ···, e_n是其代数的基本单位)这种形式的超复数相联系. 两个这种数相加得一个这种数. 为了求得两个这种数的乘积, 需要对于单位e₁, ···, e_n构造一个同哈密顿为单位1, i, i, k定义的乘法表类似的乘法表. 在这里, 我们有很大的自由, 我们能以构造不同的乘法表来创造不同的代数. 乘法表受我们要求该代数适应的应用和我们指望该代数遵守的代数定律所左右.

在这里,对哈密顿或格拉斯曼的工作都不宜讲得太深。通过发展在遵守的定律方面不同于普通代数的代数,为不可胜数的代数结构的研究开辟了道路。靠减弱或取销普通代数的不同公设,靠把一个或多个公设换成别的与其余公设相容的公设,可以得到许多种代数系统。例如*,取消上一讲列出的域的公设中的公设P2,导致称做可除环(division ring)或除环(sfield)的代数结构,可证明。四元数构成可除环。取消公设P2,P7,P10导致整环(integral domain),取消公设P2,P9,P10导致含单位元的环(ringwith wnit),取消公设P7,P9,P10构成交换环,取消P2,P7,P9,P10构成(不带定性短语或形容词的)环。在下一讲中,我们将考虑以类似方法得到的一种特别基本、特别重要的代数结构,我们称之为群(group)。估计数学家已经研究过超过200种这样的代数结构,正如美国代数学家伯克霍夫(Garrett Birkhoff)和拉纳(Saunders Mac Lane)所说。"现代代数第一次列出了这么多种可能的数学系统。"**

让我们在结束本讲之前再介绍一种非交换代数——矩阵代数,这是英国数学家凯利(Arthur Cayley, 1821—1895)于1857年想出的。追溯其思想根源,凯利是把矩阵和下列类型的线性变换相联系的。

^{*} 由不同作者给出的定义有微小的差别。

^{**} Garrett Biokhoff 和 Saunders Mac Lane 著 A Survey of Modern Algebra, Macmillan, 1941, P. 1.

$$x' = ax + by,$$

$$y' = cx + dy,$$

在这里, a, b, c, d是实数, 并且, 它们可被看作是把(x, y)点 映到(x', y')点. 显然,上述变换完全决定于a, b, c, d四个系数,并且,因而该变换可被符号化为方阵

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

——我们称之为二阶方阵,因为两个这种变换是恒等的当且仅当 它们具有同样的系数,我们定义

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \not\pi \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

两个矩阵为相等的,当且仅当a=e, b=f, c=8, d=h. 如果在作了上述变换之后,接着再来

$$x'' = ex' + fy',$$

 $y'' = gx' + hy'.$

这么个变换,则根据初等代数可证明,结果是变换

$$x'' = (ea + fc)x + (eb + fd)y,$$

$$y'' = (ga + hc)x + (gb + hd)y.$$

这启发我们为两个矩阵的积作出下列定义:

$$\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{bmatrix}.$$

矩阵的加法被定义为。

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}.$$

并且,如果m是任何实数,我们定义

$$m\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} m = \begin{bmatrix} ma & mb \\ mc & md \end{bmatrix}$$

在这里得出的矩阵代数中,可证明.加法既符合交换律又符合结合律,并且,乘法符合加法上的分配律.但是,乘法不符合交换律,这只要举下面这个简单例子就可以明白:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

虽然,乘法不符合交换律的代数在十九世纪中叶设计出了许多种,但是,乘法不符合结合律的代数被设计出来是最近的事。作为这种代数的例子,我们有约当代数和李代数。量子力学中使用的一种特殊的约当代数,以矩阵为元素,共相等和加法的定义和凯利矩阵代数中一样,但是,它把A和B两个矩阵的乘积定义为(AB+BA)/2,在这里,AB表示A和B两个矩阵的凯利积。虽然可证明。在此代数中,乘法不符合结合律,但是,显然,它符合交换律。李代数与上述的约当代数不同,在其中,A和B两个矩阵的积被定义为AB-BA,在这里,AB表示A和B两个矩阵的凯利积。在此代数中,乘法既不符合结合律又不符合交换律。

希奇的是:哈密顿的四元数有一个时期受到许多人的欢迎,认为它将是未来的物理学家们必不可少的工具;然而,现在早已成为数学史上一项很有趣的古董,它已经被比它灵活得多的向量分析所完全取代.向量分析是美国物理学家和数学家 J.W.吉布斯(Gibbs, 1839—1903, 耶鲁大学)创立的.另一方面,凯利矩阵硕果累累,并且,今天构成数学上很重要的工具.四元数之所以出名就在于它推倒了传统代数的关卡;他们的创造无疑堪称数学史上的里程碑。

习 题

- 29.1 确定下列的为正整数定义的二元运算 * 和 | 是否 符 合 交换律和结合律,运算 | 是否符合运算 * 上的分配律。
 - (a) a * b = a + 2b, $a \mid b = 2ab$,
 - (b) $a * b = a + b^2$, $a \mid b = ab^2$,
 - (c) $a * b = a^5$, $a \mid b = b$,
 - (d) $a * b = a^2 + b^2$, $a \mid b = a^2b^2$.
 - 29.2 按照哈密顿的办法,把复数看作有序实数对,证明,
 - (a) 加法符合交换律和结合律,
 - (b) 乘法符合交换律和结合律.
 - (c) 乘法符合加法上的分配律.
 - (d) (a, 0) + (b, 0) = (a+b, 0).
 - (e) (a, 0)(b, 0) = (ab, 0).
 - (i) (0, b) = (b, 0)(0, 1).
 - (g) (0, 1)(0, 1) = (-1, 0).
- 29.3 (a) 求(1,0,-2,3)和(1,1,2,-2) 这 两个四元数的和。
- (b) 依两种次序求(1, 0, -2, 3) 和 (1, 1, 2, -2) 的 乘积.
 - (c) 证明四元数的加法符合交换律和结合律.
 - (d) 证明四元数的乘法符合结合律和乘法上的分配律.
 - (e) 证明: 实数和复数被嵌入四元数内:
- (i) 把a+bi+cj+dk和e+fi+8j+hk当作i, j, k的多项式相乘,并且,借助于四元单位的乘法表,使之与定义的两个四元数的乘积完全一致。
 - 29.4 (a) 如果 x' = ax + by, x'' = ex' + fy',

$$y' = cx + dy$$
, $y'' = gx' + hy'$,

证明

$$x'' = (ea + fc)x + (eb + fd)y.$$

$$y'' = (8a + hc)x + (8b + hd)y.$$

(b) 已知矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

计算A+B, AB, BA和A².

- (c) 证明矩阵的乘法符合结合律和加法上的分配律.
- (d) 证明、在矩阵代数中,矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 起单位元的作用,矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 起零的作用。
 - (e) 证明

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

和

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

在这里, 普通代数哪两条熟悉的定律不成立?

- 29.5 (a) 证明矩 阵 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 没有平方根.
- (b) 证明:对于任何实数k

$$\begin{bmatrix} k & 1+k \\ 1-k & -k \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

因而矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 有无穷多平方根.

29.6 (a) 证明, 我们可以把复数定义为

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

这种形式的矩阵,在这里a和b为实数,它满足通常的矩阵加法和乘法的定义。

(b) 证明,我们可以把实四元数定义为

$$\begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{bmatrix}$$

形式的矩阵,在这里 a, b, c, d 均为实数并且 $i^2 = -1$; 它满足通常的矩阵加法和乘法的定义.

29.7 (a) 取

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

为约当代数的元素, 计算A+B, AB, BA, A(BC)和(AB)C.

- (b) 取(a)中的A, B, C为李代数的元素, 计算A+B, AB, BA, A(BC)和(AB)C.
 - 29.8 考虑所有有序实数对的集合并定义
 - (1) (a, b) = (c, d) 当且仅当a = c并且b = d,
 - (2) (a, b) + (c, d) = (a+c, b+d),
 - (3) (a, b)(c, d) = (0, ac),
 - (4) k(a, b) = (ka, kb)
 - (a) 证明: 乘法符合交换律、结合律和加法上的分配律.
 - (b) 证明, 三个或三个以上元素的乘积总等于(0,0),
 - (c) 为单位u=(1,0)和v=(0,1)作一个乘法表,

参考文献

BELL, E. T., Men of Mathematics. New York: Simon and Schuster, 1937.

CROWE, M. J., A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System. Notre Dame, Ind.: University of Notre Dame Press, 1967.

EVES, Howard, Elementary Matrix Theory. Boston: Allyn and Bacon, 1966. Reprinted by Dover, 1979.

FORDER, H. G., The Calculus of Extension. New York: Cambridge University Press, 1941.

第 30 讲

一种重要的基本结构

代数结构是十九世纪发展起来的,其中有一种称做群结构; 人们已经认识到它在数学中的头等重要地位。虽然 A. L. 柯西 (Cauchy. 1789—1857)和他的后继者们在置换群的特殊形式下对 群的概念进行过最初的广泛的研究;J. L. 拉格朗日(Lagrange, 1736—1813)早在1770年就曾非正式地利用过这个概念; 其定义 和名称则是E. 伽罗瓦(Galois, 1811—1832)1830 年在其关于方程 论的深奥论文中给出的。随后有凯利(Cayley)、 西罗(Sylow)、 李(Lie)、弗罗贝尼乌斯(Frobenius),尤其是克莱因(Klein)、赫尔德(Hölder)、庞加莱(Poincare')等人的宏伟著作,群的研究呈 现其独立的抽象形式并且发展得异常迅速。群论在二十世纪过了 四分之三之后,仍然是数学研究的一个很活跃的领域。

群的概念的创造是数学史上的一个里程碑,在本讲中,我们将简短地讲述群的概念并说明其在代数领域的重要地位,在下一讲中,我们将讲述F,克莱因于1872年提出的群在几何学中的极漂

亮的应用。此应用构成数学史上的另一个里程碑。

群——人们熟悉的最简单的代数结构之一——是元素的非空集合 G,在其中定义一个二元运算 *,并满足下列三条公设:

- G1 对于 G中的一切元素a, b, c, (a*b)*c=a*(b*c).
- G2 G中存在一个元素i, 使得。对于G中所有的a, a*i=a(元素i被称做该群的右单位元素。随后我们将证明 一个群只有一个这样的元素。)
- G3 对于G中的每一元素a,存在G的一个元素 a^{-1} ,使得a* $a^{-1}=i$ (元素 a^{-1} 被称做a的右逆元素,随后我们将证明,一个群的一个元素a只有一个右逆元素。)

如果除了上述三条公设外,还满足下列公设,则该群被称做 交换群或阿贝尔群.

G4 对于G中所有a, b, a*b=b*a,

- 一个群,如果公设 G4对于它不保持的话,被称 做非阿贝尔群·如果一个群的集合 G 只包括有限多个不同的元素,则该群被称做有限群,否则它被称做无限群·为了某些目的,半群这个简单得多的概念是重要的,它是元素的非空集合 G,在其上,定义一个二元运算*,只满足公设 G1. 如果除此之外 还 满足 G4 的话,则该半群被称做阿贝尔半群·群的实例多得很,而且是多种多样的,只要看看下列的例子就明白了。
- (a) 令 G 为所有整数的集合,并且令 * 表示普通的加法.在 这里,0 是单位元素,给定的整数a的逆元素是其负元.这是无限 阿贝尔群的一个例子.
- (b) 令 G 为除 0 外所有有理数的集合,并且令 * 表示普通的乘法,在这里,1是单位元素,给定的有理数a的逆元素是其倒数 1/a.这是无限阿贝尔群的另一个例于.
 - (c) 令 G 为坐标平面的所有变换

$$T: \begin{array}{c} x' = x + h, \\ y' = y + k, \end{array}$$

的集合(在这里,h和 k 是实数),并且令 T_2*T_1 表示先进行变换 T_1 再进行变换 T_2 的结果.如果 T_1 和 T_2 是变换

$$x' = x + h_1,$$
 $x' = x + h_2$
 $y' = y + k_1,$ $y' = y + k_2,$

则易于证明、 T_1*T_1 是变换

$$x' = x + (h_1 + h_2)$$

$$y' = y + (k_1 + k_2),$$

它又是一个变换, 我们能容易地证明; 运算 * 是符合结合律的, 单位元素是这样的变换, 在其中, h=k=0, 并且, 变换T的逆是变换

$$T^{-1}: x' = x - h,$$
$$y' = y - k,$$

这也是无限阿贝尔群的一个例子.

- (d) 令 G 为 1, -1, i, -i (在这里, $i^2 = -1$) 四个数的集合,并且,令 * 表示普通的乘法·在这里, 1 是单位元素, 1、-1、i、-i的逆元素分别为: 1, -1, -i, i 这是有限阿贝尔群的一个例子。
- (e) 令 G 为1、2、3、4四个整数的集合,并且令 a * b表示以 5除 a 和 b 的普通乘积所得的余数,我们可以用运算表的形式将 a * b 的所有可能的值列出如下:

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2 3	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

a行和b列的交叉处,即a*b的值,注意,1是单位元素,1、23、4的逆元素分别为1、3、2、4.这是有限阿贝尔群的另一个例子.

对于任一有限群,都能造这么一个运算表.如果该运算表对

其主对角线来说是对称的,有如上例,则该群是阿贝尔群;否则,它是非阿贝尔群,单位元素是正好重复行首的列之列首元素.要找元素 a 的逆,我们只要在以 a 为首的行中挨个查,查到单位元素;这个单位元素的列首即a-1.没有什么简单的办法可以用来验证运算*是否符合结合律.

- (f) 令 G 为一个轮子绕其轴转 60° 的非负整数倍的所有转动的集合,在这里, $(6n+k)60^{\circ}$ 的转动 $(n\pi k)$ 是非负整数,k<6)被看作是与转动 $k\cdot60^{\circ}$ 一样的,令 a*b表示,继转动 a 之后有转动 b . 这是有限阿贝尔群的一个例子。
 - (g) 令 G 为所有2×2矩阵

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

的集合(在这里,a、b、c、d是所有使 $ad-bo\neq 0$ 的有理数), 并且令*表示普通(凯利)矩阵乘积(参看第29讲). 在这里,矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

是单位元素, 矩阵

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

的逆元素是矩阵

$$\begin{bmatrix} d/(ad-bc) & -b/(ad-bc) \\ -c/(ad-bc) & a/(ad-bc) \end{bmatrix}.$$

这是无限非阿贝尔群的一个例子.

(h) 令 G 为

$$r, \frac{1}{r}, 1-r, \frac{1}{1-r}, \frac{r-1}{r}, \frac{r}{r-1}$$

六个表达式的集合,并且令a*b表示以b表达式代替表达式a中的r的结果,例如,

$$(1-r)*\frac{r}{r-1}=1-\frac{r}{r-1}=\frac{1}{1-r}.$$

这是有限非阿贝尔群的一个例子,

许多事,只要把群的例子显示出来,就完成了。首先,以例子证明,既存在有限的阿贝尔群,也存在无限的阿贝尔群,既存在有限的非阿贝尔群。也存在无限的非阿贝尔群。其次,以非阿贝尔群的存在,证明公设G4独立于其它三条公设。最后,以阿贝尔群的多种表达方式证明公设G1、G2、G3、G4的相互相容性。因为这些表达方式中的一些(参看例(d)、(e)、(f))只包括有限多个能以明确地显示的符号表示的对象,由此得出。我们已经证明了此公设集的绝对相容性而不只是相对相容性。其实,对于任何一个能以只包括有限多个对象的模型显示的公设集,都是一样的。在相反的场合,模型法则仅能把一个系统的相容性归结为另一个系统的相容性。将在下一讲中更加全面地阐述公设集的相容性的重要意义。

数学家们已经为群设计出许多公设集;当然,它们都是彼此等价的。常常需要再补充别的假定。例如,通常在G2和G3之外补充假定。i与G的每一元素可交换,G的每一元素 a 与其逆元素 a⁻¹可交换。同时,美学上喜欢尽可能地少假定,而从逻辑的观点看又是无损的。我们已经以此为理由采用较弱的公设集,并且将把附加的关于可交换性的假定当作定理来推导*。我们继续做这件事,把有些证明留作习题。

群的一些基本定理

定理1 如果a、b、c在G中,并且a*c=b*c,则a=b. 根据G3,存在 c^{-1} . 由于a*c=b*c,我们有 $(a*c)*c^{-1}=$ $(b*c)*c^{-1}$,再根据G1, $a*(c*c^{-1})=b*(c*c^{-1})$. 利用G3,则我们有a*i=b*i,最后,根据G2,得a=b.

定理2 对于G中所有a, i * a = a * i.

^{*} 事实上, 我们为群规定的公设集本身还能进一步减弱。

根据G3,存在 a^{-1} . 因此,依次应用G1、G2、G3、G4,我们有 $(i*a)*a^{-1}=i*(a*a^{-1})=i*i=i=a*a^{-1}$. 根据定理1,我们有i*a=a. 但是,根据G2,我们有a*i=a. 由此得出i*a=a*i.

定理3 一个群只有一个单位元素.

令i和j为该群的两个单位元素。于是,把 G2 应用于单位元素i,i*j=i. 又根据定理2,i*j=j*i. 但是,把 G2 应用于单位元素i,j*i=j. 由此得出i=j.

定理4 对于G的每一元素a, $a^{-1}*a=a*a^{-1}$.

依次应用G1、G3 和定理 2,有: $(a^{-1}*a)*a^{-1}=a^{-1}*(a*a^{-1})=a^{-1}*i=i*a^{-1}$. 所以,根据定理 1, $a^{-1}*a=i$. 但是,根据G3, $a*a^{-1}=i$. 由此得出 $a^{-1}*a=a*a^{-1}$.

定理5 如果a、b、c在G中,并且c*a=c*b,则a=b.

定理6 一个群的每一元素有唯一的一个逆元素.

定理7 如果a在G中,则 $(a^{-1})^{-1}=a$.

定理8 如果a和b在G中,则存在G中唯一的元素x和y,使得 a*x=b和y*a=b

代数中群和半群的重要性基本上在于它们的巨大的结合力. 许多代数系统实际上是关于该系统的一种或多种二元运算的群或 半群.换句话说,许多代数结构把群结构或半群结构作为于结构 包括于它们之内.群和半群象代数原子,许多代数结构能由它们 构成.下述关于环、交换环、含单位元环、整环、除环和域的定义 *(参看第29讲)能为说明这些思想提供例证.

环是元素的集合S,在其中定义两个二元运算(一个叫加法,一个叫乘法),使得。(1)S在加法下是阿贝尔群,有称做零的单位元素,(2)S在乘法下是半群,(3)乘法在加法上的两种分配律保持。

^{*} 参看N. Jacobson, Lectures in Abstract Algebra (vol. 1, Basic Concept), Chapter 2.

交换环是这样的一个环,在其中乘法半群是阿贝尔半群. 含单位元环是这样的一个环,在其中乘法半群有单位元素. 整环是这样的一个环,在其中非零元素组成乘法半群的子半群.

除环(或体)是多于一个元素的环,在其中非零元素组成乘法 半群的子群,

域是这样的除环,在其中乘法半群是阿贝尔的.换句话说,域是至少有两个元素的集合 S,对于它,二元运算(在这里称做加法和乘法)被定义使得.(1) S的元素组成在加法下的 阿贝尔群,(2) S的非零元素组成在乘法下的阿贝尔群,(3)乘法在加法上的右左分配律都保持.

习 题

- 30.1 证明: 1和-1两个数的集合在普通乘法 下 组 成 一个群,它是本讲例(d)那个群的一个子群。
 - 30.2 (a) 偶整数关于加法是否形成一个群?
 - (b) 奇整数关于加法是否形成一个群?
 - (c) 有理数关子乘法是否形成一个群?
- - (e) 所有整数的三倍关于加法是否形成一个群?
 - 30.3 令 G 为笛卡儿平面所有绕原点的转动 $x' = x \cos \theta y \sin \theta$

 $R: y' = x \sin \theta + y \cos \theta$

的集合,并且令 R₁* R₁表示先作转动 R₁ 再作转动 R₁ 的结果.证明: G在运算*下组成一个无限阿贝尔群.

30.4 作本讲例(d)的运算表,

- 30.5 令 G 为0、1、2、3、4 五个整数的集合,并且令 a * b 表示以 5 除 a 和 b 的 普通乘积所得的余数. 试问: G 在运算 * 下是 否组成一个群?
 - 30.6 实际地证明本讲的例(g)组成一个无限非阿贝尔群.
 - 30.7 (a) 为本讲例(h)的群作运算表,
- (b) 依此顺序排列的 A 、 B 、 C 、 D 四个共线点的交比被定义为

$$r = (AB, CD) = \left(\frac{AC}{BC}\right) \left(\frac{BD}{AD}\right).$$

四个共线点的交比的值明显地与我们所考虑的点的次序有关,这么一来,对应于这四个点的24种排列(或次序)有24个交比,证明,不同的交比一般地说只有6种,并且,它们由例(h)的6种表达式给出,因此,例(h)的群被人们称做交比群,

30.8 考虑有序三元数(a, b, c),以c代替a,以a代替b,以b代替c的置换可用阵列

$$S = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{bmatrix}$$

表示.总共可组成六种可能的置换(把恒等置换计算在内).如 S_1 和 S_2 表示这六种置换中的两个,令 S_2*S_1 表示在置换 S_1 之后再作置换 S_2 的结果.例如

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{bmatrix}$$

证明: 有序三元数(a, b, c)的六个置换在运算*下组成一个无限非阿贝尔群. 此群被称做三次对称群, 对于每一个正整数次n, 存在一个这样的置换群. 置换群曾受到群论早期著作家的重视.

- 30.9 (a) 证明本讲定理5.
- (b) 证明本讲定理6.
- (c) 证明本讲定理7.
- (d) 证明本讲定理8.

30.10 证明,为群规定的公设G2和G3可以用G2¹代替,即,如果a和b为G的任一元素,则存在G的元素x和y使得 a*x=b 和y*a=b.

证明:只作简单的假定存在》使得以* a=b,是不充分的.

30.11 如果以下列的G3'代替G3,是否仍然是一个群? G3'. 对于G的每一元素a,存在G的一个元素 a^{-1} ,使得 $a^{-1}*a=i$.

参考文献

JACOBSON, N., Lectures in Abstract Algebra (Vol. 1, Basic Concepts). Princeton, N. J.: D. Van Nostrand, 1951.

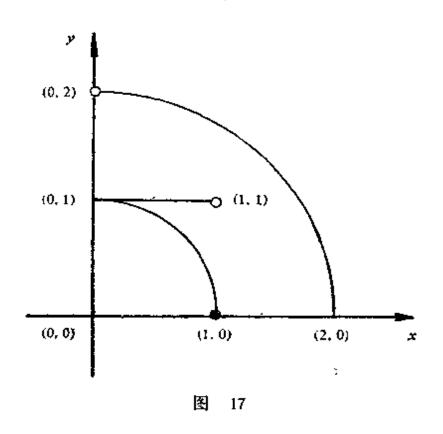
第 31 讲

集几何之大成

1872年,在爱尔兰根大学哲学教授评议会上,F.克莱因 (1849—1925)按照惯例作其专业领域方面的就职演讲.此演讲以他本人和挪威数学家S.李 (1842—1899) 在群论方面的工作为基础,给"几何学"下了个值得注意的定义,它本质上对所有那时存在的几何进行了整理,并且为几何学的研究开辟了新的、富有成果的途径.此讲演,连同它提倡的几何学研究的规划,已成为人们熟知的爱尔兰根纲领.当时,群论几乎渗透进数学的每一领域,并且数学家们开始认识到:所有的数学不过是群论的此种或彼种形式;看来,这是符合总的趋势的。

克莱因将群论应用于几何学时,用到了非奇异变换的概念. 所谓非奇异变换是指元素的集合 S 到自身的一个对应,在此对应下 S 的每一元素对应于 S 的一个唯一元素,并且, S 的每一元素 是S的一个唯一元素的对应.这样的一种对应被称做一一对应*.如果在集合S到自身的一个非奇异变换T下,S的元素a对应于S的元素b,我们说.在变换T下,元素a被带到元素b.

元素的集合 S到自身的两个非奇异变换 T_1 和 T_2 的乘积 T_2T_1 ,指的是:先进行变换 T_1 ,再进行变换 T_2 的结果.集合 S到自身的两个非奇异变换的乘积不一定是可交换的.例如,取 T_1 为对(x,y)平面上所有点的集合 S沿x轴的正方向移动一个单位 距离的平移,而取 T_2 为集合 S 围绕坐标原点依反时针方向转 90° 的旋转.在 T_2T_1 下,点(1,0)被带到点(0,2);而在 T_1T_2 下,点(1,0)被带到点(1,1),如图17所示.但是,集合 S 到自身的非奇异变换的乘积是符合结合律的,因为如果 T_1 、 T_2 、 T_3 为集合 S 到自身的任何三个非奇异变换,则 T_3 (T_2T_1)和(T_3T_2) T_1 都表示先进行 T_1 ,



^{*} 更一般地,如果S和T是两个集合,则S的元素和T的元素之间的——对应是指一组有序对(s,1),使得S的每一元素s作为第一个元素正好一次,并且, T的每一元素t作为第二个元素正好一次。

然后 T_2 ,然后 T_3 所得的结果。这只要跟踪S的任意一些元素在这些变换下的结局就知道了。例如,假定 T_1 把元素a带到元素b, T_2 把元素b带到元素c,而 T_3 把元素a带到元素d,则 T_2T_1 把元素a直接带到元素c,再加上 T_3 把元素a带到元素d,另一方面, T_1 把元素a带到元素b, T_3T_2 把元素b直接带到元素d,所以, $(T_3T_2)T_1$ 也把元素a直接带到元素d.

若 T 为集合 S 到自身的任一非奇异变换(它把 S 的每一元素 a 带到 S 的其对应元素 b),则抵消变换 T 的变换(把 S 的每一元素 b 带回到 S 的其原来的元素 a) 称为变换 T 的逆变换,表示为 T^{-1} . T 和 T^{-1} 的乘积,无论取什么次序,显然是令 S 的所有 元素不变的变换,这样一种变换称为恒等变换,以 I 表示。要注意的是: TI = T 对于所有的 T 都成立。

现在我们可以证明下面的重要定理.

定理G.集合 S 到自身的非奇异变换的非空集合 Γ , 在变换的乘法下组成一个群,如果(1)集合 Γ 的任何两个变换的乘积在集合 Γ 中,(2)集合 Γ 中任一变换的逆变换在集合 Γ 中。

为了证明此定理,我们首先注意到: 因为集合 Γ 中任何两个变换的乘积在集合 Γ 中,所以变换的乘法是定义在集合 Γ 上的二元运算。此二元运算是符合结合律的,这点我们已在上面证明过。此外,如果T是 Γ 中的变换,则根据性质 $(2)T^{-1}$ 在 Γ 中,再根据性质(1), $I=TT^{-1}$ 也在 Γ 中。而我们在上面已经证明过, $TI=T^{-1}$ 中,对于 Γ 的所有T都成立。于是群的所有三条公设全被满足,定理得证。

这种非奇异变换构成的群称为变换群.

我们现在该来讲F.克莱因给几何学下的著名定义了,但是, 在做这件事之前,考察一下把克莱因引导到他的定义的思想起源, 会是有趣的、有教益的. 欧几里得《原本》的前部分认为,在同一的未扩充平面(即未补充任何无穷远理想元素的普通平面)上的两个图形是相等的,当且仅当能通过适当的平移、转动和线反射使一个图形与另一个图形重合.这样,在《原本》的前一部分中,我们研究的是非扩充平面上图形的那些性质,这些性质在平面的等距变换(即平移、转动,线反射及其乘积)下保持不变。由于任何两个平面等距变换的乘积是一个平面等距变换,任一平面等距变换的逆变换仍是一个平面等距变换,所以根据定理G得出。平面上所有等距变换的集合构成一个变换群。于是,我们可以把平面欧几里得度量几何看作是对未扩充平面上图形在平面等距变换群下不变的那些性质的研究。象长度、面积、重合、中点、平行、垂直、点的共线和线的共点这样一些性质就是上面所说的不变的性质,而这些性质正是平面欧几里得度量几何所研究的。

平面欧几里得几何并不把自己局限于研究未扩充平面上图形在平面等距变换下不变的性质,因为在《原本》的后一部分中还研究了相似形,也就是说,把在平面的相似变换下保持不变的图形性质也置入视野. 所谓平面相似变换是由平面等距变换和平面扩大变换复合成的. 在平面扩大变换中,每一个点P被带到一个点P',使得: AP'=k·AP, A为某定点, k为某固定实常数,并且, A、P、P'共线. 由于两个平面相似变换的乘积还是一个平面相似变换,一个平面相似变换的逆变换也是一个平面相似变换,一个平面相似变换的逆变换也是一个平面相似变换,于是我们可以把平面相似几何看作是研究未扩充平面上图形在平面相似群下不变的那些性质的. 但在此扩大了的群下,长度、面积和重合这些性质不再保持不变,因而不再受到研究,但中点、平行、垂直、点的共线和线的共点则仍然是不变的性质,因而成为在此几何中被研究的课题.

如此看来,平面欧几里得几何实际上是两种更加基本的几何的混合物,这指的是:平面欧几里得度量几何和平面相似几何,

334

每一种几何都是相应的变换群的不变量理论.

平面射影几何是研究扩充了的平面的图形在所谓射影变换下保持不变的那些性质,由于两个射影变换的乘积还是一个射影变换,一个射影变换的逆变换也是一个射影变换,因此,根据定理 G,所有射影变换的集合构成一个变换群,平面射影几何可被说成是此特殊变换群的不变量理论,在前面说的那些性质中,只有点的共线性和线的共点性仍保持不变,此变换群的一个重要不变量是四个共线点A、B、C、D的交比(AC/BC)(BD/AD),此不变量在射影几何的研究中起头等重要的作用,因为任何一种类型的圆锥曲线都能射影变换到其它任何一种类型的圆锥曲线,所以平面射影几何(与平面欧儿里得几何不同)把椭圆、抛物线和双曲线当作相同的曲线来研究,

定理G向我们保证:在扩充了的平面上把一些固定直线(通常为无穷远直线)带到自身的所有射影变换的集合构成一个变换群.对扩充了的平面的图形在此群的变换下不变的性质的研究,被人们称做仿射几何,此外,定理G向我们保证:在扩充了的平面上把一条固定直线带到自身和一个固定点带到自身的所有射影变换的集合也构成一个变换群.对扩充了的平面的图形在此群的变换下不变的性质的研究,被人们称做平面中心仿射几何.

在第27讲中讲过的平面非欧度量几何,可被看作是在等距变换群下保持不变的非欧平面的那些性质的研究.

上面讲的所有的几何都是平面几何,但是,类似的研究能在三维或任何高维空间中被实现——这些高维几何的每一种都是其相应的变换群的不变量理论。此外,在所有上述的几何中,被施加以某变换群的变换的图形,被看作是由点组成的。因此,所有上述的几何是所谓点几何的例子。但是,存在一些几何,不是把点选作基本元素。几何学者们已经研究过许多这样的几何,象线几何、圆几何和球几何。但是,所有这些几何,同已经考虑过的点几何一样,能被看作是某变换群的不变量理论。

就是我们刚才讲的这些思想导致 F. 克莱因为几何学下了一个振聋发聩的、富有活力的和极为一般的定义,这个定义开辟了几何学研究的新领域,对当时存在的几何知识的混乱引进了很好的秩序,克莱因给几何学下的著名定义是:

定义和表示法 几何学是对集合 S 的那些性质的研究,这些性质当 S 的元素受到某变换群 Γ 的变换时保持不变。这样的一种几何,以符号 $G(S,\Gamma)$ 表示。

于是,在建造一种几何时,人们可以自由地选择:首先,该 几何的基本元素(点、线、圆、球,等等), 其次、这些元素的集 合或空间(一个平面的所有点,普通空间的所有点,一个球面的 所有点,空间的过空间定直线的所有平面,空间的过空间一定点 的所有平面,平面的过平面两定点的所有的圆,一个给定正方形 的四个顶点,等等.); 最后, 对元素的集合所施行的变换群. 这 么一来,构造一种新的几何成了很简单的事,爱尔兰根纲领提倡 按照此计划对现存的几何分类,并创造和研究新的几何,尤其是, 人们应该研究以给定的几何的变换群的各种真子群 为 特 征 的几 何,这样就能得到包含其它几何的几何。例如,平面欧几里得度 量几何的变换群是平面相似几何的变换群的子群,所以在后一种 几何中成立的定义和定理在前一种几何中也成立,又如,平面仿 射几何的变换群是平面射影几何的变换群的子群,所以在平面射 影几何中成立的任何定义或定理在平面仿射几何中也成立。把无 穷远线附加到平面欧几里得度量几何和平面相似几何的未扩充的 平面上(此附加的线在这些几何中将被看作是变换到它自身),可 以看到:我们讨论过的某些点几何可被排成序列:

《欧几里得度量、相似、中心仿射、仿射、射影》,在这里,这些几何的任何一个的变换群是序列中随后的几何的任何一个的变换群的真子群。直到最近,射影几何的变换群实际上包括了所有其它研究过的几何的变换群,并以它们作为自己的子群。A. 凯利曾说:"射影几何包括所有几何",就是这个意思。实际上,

也可从这种角度考虑几何的定理(这是另一种途径)——射影几何的定理被包含在其它每一种几何的定理中,并且,在上述序列中, 欧几里得度量几何是定理最多的一种几何.

有些几何学者对克莱因给几何学下的定义作了小的修正,即:

修正的定义 几何学是对集合 S 的那些性质的研究,这些性质当 S 的元素受到某变换群 Γ 的变换时保持不变,但是当受到 Γ 的真子群的变换时不保持不变。

按照此修正的定义,则在一系列几何(比如,上面列的那个系列)中的任何定理,能属于且仅能属于该系列中的一种几何,而不是属于几种几何或属于在系列中排在它前面的所有几何。这使我们能把属于这一系列几何的一条定理,确切地划归该系列的一种几何。

依克莱因的观点看,各种各样的几何也许最好能以解析几何 的方法被研究;在解析几何中,每一变换 群 Γ 的变换是由所考虑 的空间的基本元素的新、旧坐标的关系式给出的。例如,平面射 影几何的变换群是形如

$$x' = \frac{ax + by + c}{gx + hy + i}, \qquad y' = \frac{dx + ey + f}{gx + hy + i},$$

的全体变换. 这里, a, b, c, …是满足条件

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \neq 0$$

的任何实数.

如果厂为形如

$$x' = f(x, y), y' = g(x, y)$$

的全体变换. 这里, f(x, y)和8(x, y)是单值的和 连 续 的, 并且, 逆变换存在, 逆变换也是单值的和连续的. 这样, 我们便得到了近代的几何学的分支——平面拓扑学. 从此定义出发, 我们能知道为什么平面拓扑学常被称做"橡皮膜"几何, 因为在伸展或

收缩一块橡皮膜时,橡皮上的点正是作这样一种单值 双 连 续变换,因为任何两个上述变换的乘积还是一个同类的变换,定理G向我们保证:Γ是一个变换群,因此在克莱因定义的意义上拓扑学是一种几何。

拓扑学也许在早先考虑的意义上是最深的几何,其变换群包含所有前面讲过的变换群,并且,我们能修正凯利的警语而说:"拓扑学包括所有几何。"因为拓扑变换是如此之宽广,甚至人们怀疑,在这些变换下还会有什么点的平面的性质能保持不变。我们举几个简单的例子,首先,可以指出。简单闭曲线(自身不相交的闭曲线)经过拓扑变换仍然是简单的闭曲线。其次,从一简单闭曲线中只挖去一个点并不会使该曲线成为不连通的,这是一条拓扑性质,从一简单闭曲线挖去两个点,就把该曲线分成两部分,也是一条拓扑性质。在函数的现代处理中常要用到拓扑性质。

克莱因的综合和整理,在尔后将近五十年中,基本上保持有效.但是,在世纪转折后不久,数学家们认为应该称做几何的一批数学命题水落石出了,这批命题不能纳入克莱因的总结.一种新的观点在发展,这种观点以赋予结构的抽象空间的思想为基础,它可以不用变换群来定义.我们将在下一讲中阐述这种新观点,在这里只指出:这些新几何中有一些已经体现于爱因斯坦广义相对论的现代物理空间理论中。克莱因的概念在它适用的地方仍然很有用,并且,我们可以称符合克莱因上述定义的几何为克莱因几何.将克莱因的定义推广和一般化,以使得它能包括克莱因原来的纲领之外的几何,这方面的工作在二十世纪部分地获得成功,特别要提到的是,美国的O.维布伦(Veblen. 1880—1960)和法国的E.嘉当(Cartan. 1869—1951).

克莱因对他给几何学下的定义的系统阐述标志数学史上的里程碑.确实,这概念对于许多基础的几何是如此简洁,如此有用,甚至已被许多中学几何教科书作者采用.

在总结此讲和前面两讲时,我们能以真理的清晰语言简单明

确地说:几何基本上是研究不变量的,而代数基本上是研究结构的,

习 题

- 31.1 下列的点平面到自身的非奇异变换中哪些对是关于乘 法可交换的?
 - (a) 两个平移;
 - (b) 围绕同一固定点 O的两个转动;
- (c) 绕定点 A 的一个转动,和绕一个不同的定点 B 的另一个转动。
 - (d) 绕定点A的一个转动,和过A的线n上的一个反射;
 - (e) 一个平移, 和在平行于该平移方向的线m上的一个反射;
- (f) 一个平移,和在不平行于该平移方向的线m上的一个反射.
- 31.2 证明:集合 S 到自身的两个非奇异变换的乘积的逆变换,是这两个变换(取相反次序)的逆变换的 乘 积;即 证明: $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.将此命题推广到任意多个非奇异变换。
- 31.3 集合 S 到自身的一个非奇异变换T,如果满足 TT = I (恒等变换),则称为对合变换.
 - (a) 如果T是对合变换,证明 $T^{-1}=T$.
 - (b) 试给出点平面到自身的对合变换的至少两个例子,
- 31.4 如果 $A \times B$ 是集合 S 到自身的两个非奇异变换,则称非奇异变换 $B' = ABA^{-1} \rightarrow B$ 被 A 的变形.
- (a) 证明: 如果C'和B'分别是C和B被A的变形,则C'B'是 CB被A的变形.
 - (b) 证明: B的逆被 A的变形是 B被 A的变形的逆,
- (c) 证明:如果集合 S 到自身的两个非奇异变换的积是可交换的,则每一个变换是它自己被另一个的变换的变形.

- (d) 令 G_1 为变换群G的子群. 如果 G_1 的每一个变换用它的被是 T的变形代替(这里,T是G的一个给定的变换),证明: 这样得到 的所有变换形成G的一个子群。
 - 31.5 证明:形式为

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d}$$

(在这里, a, b, c, d为实数,并且ad-bc=1)的x轴到自身的所有非奇异变换的集合构成一个变换群.

31.6 (a) 证明: 形式为

$$x' = kx + c$$

$$y' = \frac{y}{k} + d$$

(在这里, c和d是实数, 并且k是正实数)的点平面到自身的所有非奇异变换的集合构成一个变换群, 这样的变换称为(特定的)平面罗伦兹变换, 并且该群的不变量理论称为(特定的)平面罗伦兹几何, 罗伦兹变换

$$x' = kx + c(1 - k)$$
$$y' = \frac{y}{k} + d\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

称为绕(c, d)点的罗伦兹转动(lorotation); (c, d)点称为罗伦兹转动的中心。

- (b) 证明: 平面的平移是平面罗伦兹变换:
- (c) 证明: 绕定点(c, d)的所有罗伦兹转动的集合构成所有平面罗伦兹变换的群的子群.
- (d) 证明: 罗伦兹转动把线带到线,并且,特殊地,把过罗伦兹转动中心的线带到过罗伦兹转动中心的线。
 - (e) 证明: 罗伦兹转动把每一条线带到自身,当且仅当k=1.
 - (f) 证明: 罗伦兹转动使任何三角形的面积保持不变.
 - (g) 证明: 罗伦兹转动把圆心在罗伦兹转动中心的圆带到中

心在罗伦兹转动中心并且轴平行于坐标轴的椭圆.

- (h) 我们定义罗伦兹圆为已知点(a, b)绕定点(c, d) (在这里, a≠c, b≠d) 作罗伦兹转动得到的轨迹,证明: 罗伦兹圆是过已知点的等轴双曲线,其渐近线是过罗伦兹转动中心作的坐标轴的平行线.
- 31.7 平面的所有直接等距变换(转动、平移及它们的组合)构成点平面到自身的变换群。能够证明,一般直接等距的解析表达式为

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta + a$$
,
 $y' = x \sin \theta + y \cos \theta + b$,

这里, θ 、a、b 是任意实数. 试解析地证明平面的直接等距变换 群的下列不变量:

- (a) $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ 为 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 两点的不变量. 此不变量的几何意义是什么?
- (b) $(a_1b_2-a_2b_1)/(a_1b_1+a_2b_2)$ 为 $a_1x+a_2y+a_3=0$ 和 $b_1x+b_2y+b_3=0$ 两直线的不变量。此不变量的几何意义是什么?
- (c) $(a_1x_0 + a_2y_0 + a_3)/\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ 为点 (x_0, y_0) 和直线 $a_1x + a_2y$ $+a_3 = 0$ 的不变量,此不变量的几何意义是什么?
- (d) $x_0^2 + y_0^2 + a_1 x_0 + a_2 y_0 + a_3$, 为点 (x_0, y_0) 和圆 $x^2 + y^2 + a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$ 的不变量,此不变量的几何意义是什么?
 - 31.8 考虑下列的点平面到自身的非奇异变换;

R: 绕原点顺时针转90°,

R'. 绕原点顺时针转180°,

R": 绕原点顺时针转270°,

H: 对x轴的反射,

V: 对y轴的反射,

D: 对线y = x的反射,

D': 对线y = -x的反射,

恒等运动,在其中,所有的点保持不动。

- (a) 证明: 这八个变换构成有限非阿贝尔变换群.
- (b) 给出这八个变换每一个的逆,
- (c) 设想一个物质的正方形,其中心在原点,并且,其边平行于坐标轴,证明:这八个变换的每一个把正方形带到它自身,此变换群被称做正方形的对称群.

参考文献

GANS, DAVID, Transformations and Geometries. New York: Appleton-Century-Crofts, 1969.

ROSSKOPF, M. F., J. L. LEVINE, and B. R. VOGELI, Geometry, a Perspective View. New York: Mc Graw-Hill, 1969.

第 32 讲

毕达哥拉斯是对的

人们惊叹:在接近十九世纪末的某个时候(难以指出其确切年代),西欧的土地在颤抖,并且,如果一个人把他的耳朵贴在大地上,他就会听到,从伟大的毕达哥拉斯的遥远年代的坟墓里,以古希腊的语言,用低沉的声音告诉他:"我在两千多年前就如此告诉你,那时我告诉你,万物皆依赖于整数."因为,在一系列值得注意的研究之后,西欧的数学家们在十九世纪末期已经证明:如果自然数系是相容的,则所有数学是相容的。事实上,数学的大厦被证明象是巨大的倒立的金字塔灵巧地平衡于作为顶点的自然数系之上。这个故事很有趣而且很重要,并且,此成就标志数学史上最重要的里程碑。在开讲这个故事时,让我们先回到大约二百年前牛顿和莱布尼茨创立微积分后的激动人心的年代。

在第23讲中,我们已经指出:微积分的广泛和惊人的应用是多么吸引当时的数学研究工作者,论文发表得如此之多,以致论文

作者们很少顾及此学科的很不能令人满意的基础,对微积分的运算理解得还很差;因此,在狂热地应用这些运算时,出现悖论和荒谬就是很自然的了.

虽然在牛顿和菜布尼茨创立微积分之后的大约一百年中,很少注意到要从逻辑上加强此学科的迅速增长的上层建筑的基础,但是,绝不能认为:对存在的薄弱基础没有人批评。一些数学家进行过长时间的争论,并且,两位创立者本人对此学科的基本概念也不满意。对有缺陷的基础的最天才的批判之一来自一位非数学家、著名的形而上学家贝克莱主教(Bishop George Berkeley,1685—1753),他坚持:微积分的发展包含了偷换假设的逻辑错误。我们以考察牛顿对现在称做微分所采取的方法,来弄明白这个特殊的批判。

牛顿在他1704年发表的《曲线的求积》(Quadrature of Curve)中确定x³的导数(他当时称之为流数),我们把牛顿的方法意译如下。

在x增长成为x+0的同时,幂x3成为(x+0)³,或 x3+3x30+3x0²+0³,

并且,增长(或增量)

0 $\pi 3x^20 + 3x0^2 + 0^3$

的比为

 $1 113x^2 + 3x0 + 0^2$

然后令增量消失,则它们的最后的比值将为1比3x²,因此,x³对于x的变化率为3x².

贝克莱所反对的偷换假设的错误是明显的:在论证的一部分中, 0被假定为非零的,而在另一部分中,它又被取作零.对贝克莱 的批判作出了答复,但是,在没有对极限作出严格的逻辑处理之 前,此缺点总是不能很好地克服.事实表明:其它方法也不能减 少混乱.微积分的计算过程的所有早期解释都是含糊不清的、充 满了困难和缺陷的,并且,一点也不容易读.某些解释简直是神 秘和荒谬的,例如约翰·伯努利就说:"一个增减无穷小量的量, 既不增加也不减少。"

每当我们学习一种新的数学运算,必须密切关注此运算可进行的限制条件,缺少此附加的知识能导致在此运算不适合应用的场合盲目地形式地滥用,也就可能得出荒谬的和自相矛盾的结论,

数学教师几乎每天看到他们的学生犯这类错误。例如,一位学初等代数的学生坚信: $r^0=1$ 对于所有的实数r都成立,而令 $0^0=1$,另一位学生则认为: 方程ax=b,对于每一对给定的实数a和b,总正好有一个实数解。学三角的学生会认为: 公式

$$\sqrt{1-\sin^2 x}=\cos x$$

对于所有实数 x 都成立, 而学微积分的学生, 如果不知道反常积分, 就可能从看来似乎正确地在应用形式积分法而得出不正确的结果, 或者, 把某些只对绝对收敛无穷级数有效的规则应用于某收敛无穷级数而得到一个荒谬的结论, 十八世纪, 在分析中出现的这类事多得很, 数学家们迷恋于此学科在应用上的威力, 而对该学科必须建立于其上的基础缺乏真正的理解, 常常只是凭着想当然的朴素的直觉在工作, 几乎盲目地乱用分析方法. 谬论日益增多, 乃必然结果.

伟大的瑞士数学家欧拉(Leonard Euler, 1707—1783)的著作里有十八世纪形式地使用分析方法的突出例子。欧拉发现的著名公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

对于 $x=\pi$, 生成一个联系数学中五个最重要的数的关系式 $e^{i\pi}+1=0$.

就是通过纯形式的手法, 欧拉以纯形式的手法得到许多奇妙的关系式, 例如

$$i \log \cdot i = -\pi/2,$$

并且成功地证明了:任何非零实数n有无穷多个对数(对于给定的底),如果n<0,n的对数全是虚数,如果n>0,则除了一个是实数外,其余的全是虚数.高等微积分中的 β 和 γ 函数以及分析中的

Ę

其它许多论题都是欧拉首倡的. 他是数学方面的最多产的作家. 虽然他的非凡的数学直觉总把他引到正确的途径, 但是, 也有这样的时候: 他的纯形式的推演把他引向谬误. 例如, 如果把二项式定理形式地应用于 $(1-x)^{-1}$, 然后0

$$-1=1+2+4+8+16+\cdots$$

这就是欧拉认为不得不接受的荒谬结论,还有,把

$$x+x^2+\cdots=x/(1-x)$$

和

$$1+1/x+1/x^2+\cdots=x/(x-1)$$

两个级数相加后,

欧拉得到

$$\cdots + 1/x^2 + 1/x + 1 + x + x^2 + \cdots = 0$$
.

十七世纪和十八世纪的数学家们对无穷级数不大了解,分析的这个领域产生了许多悖论,例如,考虑级数

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

如果把此级数的项依一种方法分组,我们有

$$S = (1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

= $0+0+0+0+\cdots=0$;

如果依另一种方法分组,我们有

$$S = 1 - (1-1) - (1-1$$

L.G.格兰迪(Grandi, 1671—1742) 辩解道: 因为和为 0和1是等可能的, 该级数的正确的和为平均值 1/2. 此值也能以纯形式的手法得到, 因为我们有

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - S,$$

因此2S=1,或S=1/2.

由于在分析中谬论和悖论日益增多,数学的发展遇到深刻的令人不安的危机(数学史上的第二次危机),也越来越看得清楚了. 应该记得,在第5讲中讲过:由于出乎意料地发现,不是所有的 同类几何量都是彼此可公度的,在公元前五世纪出现了数学基础中的第一次灾难性的危机.第一次危机最终解决是在公元前370年左右,那是卓越的欧多克斯(Eudoxus)的功绩,他修订后的量和比例的理论是数学史上的伟大杰作之一(参看第6讲).由于对分析的大厦是建立在沙滩上这一点越来越有所认识,所以必然或迟或早会有一些有责任感的数学家来攻克把微积分建立在严格基础上的这个难关.我们将会看到;这项工作的最终完成构成数学史上另一项伟大成就.

第一个为补教第二次危机提出真正有见地的意见的是J.达兰贝尔(d'Alembert, 1717—1783),他在1754年指出。必须用无可指责的可靠的理论来代替当时使用的粗糙的极限理论,但是他本人未能提供这个理论。最早使微积分严谨化的第一流数学家是拉格朗日(Joseph Louis Lagrange, 1736—1813),但是,他想用泰勒级数展开式来表示函数的尝试,远未成功,因为那时还不知道收敛和发散是必须考虑的事。拉格朗日的巨著《解析函数论》(Théorie des fonctions analytiques)发表于1797年。拉格朗日是十八世纪的最重要的数学家之一,他的著作对以后的数学有深刻的影响;由于拉格朗日的工作,在分析中为取消直觉和盲目的形式操作开始进行了长时间的、艰巨的斗争。

十九世纪,分析的上层建筑继续增长,但是是在更加深刻的基础之上,无疑,这主要应归功于 C.F.高斯 (Gauss, 1777—1855),因为在摆脱直观的论证、为数学的严格性提出新的更高的标准方面,高斯比他同时代的其他任何数学家都做得多,在高斯1812年做的超几何级数的处理中,我们第一次见到对无穷级数收敛性的真正充分的考虑.

多产的法国数学家A.L.柯西 (Cauchy, 1789—1857)1821年在此问题上跨出了很大一步,他成功地接受了达兰贝尔的挑战。发展了一种可接受的极限理论,然后用极限概念定义连续性、微分和定积分.这些定义基本上就是今天我们在初等微积分课本中

看到的那样,只不过现在写得比较严格一点.极限概念在分析的 发展中肯定起基础的作用,因为级数的收敛和发散也要用到此概 念.柯西的严谨激励其他数学家联合起来致力于把分析从形式推 演和直观论证中解放出来.

对分析基础作更深一步的理解的要求发生于1874年,那时得到了一个无导数的连续函数(即在其上任何点无切线的连续曲线)的例子,这同直观的信念是有些矛盾的,它是 K. 魏尔斯特 拉 斯 (Weirstrass, 1815—1897) 首先提出的. 这个例子对于在分析研究中运用几何直观的人简直是一场暴风.

连续性、可微性和收敛性赖以建立的柯西极限理论,建立在 实数系的简单直观的几何观念之上,柯西已经把实数系或多或少。 认为是当然的,大多数我们现代的初等微积分课本也 是 这 么 认 识的,显然,极限概念、连续性、可微性和收敛性依赖于实数 系比假定的性质要深奥得多的性质,把分析与实数系 较 为 深 刻 的性质相联系的另一纽结是黎曼发现的如下事实,柯西没有必要 把他的定积分定义限制于连续函数,黎曼证明,定积分甚至在被 积函数不连续时也作为和的极限而存在。在初等微积分中,这些 积分被算做反常积分, 在处理它们时, 要格外小心, 黎曼还造出 了一个函数,它当变量取无理值时,是连续的,而当变量取有理 值时,是不连续的.这样一些例子使我们越来越明白: 在探寻分析。 的完善基础方面, 柯西还没找到其困难的真正症结; 在每一件事 下面还存在迫切需要我们理解的实数系的更深刻的性质,因此, 魏尔斯特拉斯提出一个规划,实数系本身先得被逻辑地推导,然 后,再以此数系去定义极限概念、连续性、可微性、收敛和发散. 此著名的两部分规划被人们称做分析的算术化(F.克莱因1895 年 给定的名),虽然它被证明是复杂的、 困难的, 但在魏尔斯特拉 斯和其他有关数学家的努力下,在接近十九世纪末的时候,终于 实现了.

魏尔斯特拉斯规划的成功产生了深远的影响,首先,全部分

析能从实数系导出,由此得出,如果实数系是相容的,则全部分析是相容的。再则,欧几里得几何通过笛卡儿坐标解释(第20讲中所概述的)也能奠基于实数系上,所以,如果实数系是相容的,它也是相容的,并且,数学家们已证明;如果欧几里得几何是相容的,几何的许多共它分支也是相容的。此外,实数系(或其某部分)可用来解释代数的那么多分支,所以,许多代数的相容性也依赖于实数系的相容性。由此得出,只要实数系是相容的,那么大部分数学也是相容的。因此,实数系对于数学基础具有重大意义。魏尔斯特拉斯的规划无疑起了重要作用,而且,一群献身的数学家生气勃勃地为实现它而奋斗。

魏尔斯特拉斯规划的第二部分是由引进了精细的"ε—δ"程序 完成的,此程序今天普遍应用于分析中,作为例于现在我们给极 限下个刻板而巧妙的定义。

如果给定任何 $\varepsilon > 0$,存在一个 $\delta > 0$,使得 $|f(x)-L| < \varepsilon$ 对于 $0 < |x-c| < \delta$ 都成立;

则我们说L是f(x)在 $x \rightarrow c$ 时的极限.

象"相继的值"、"最终的比"、"取得尽可能小"和"无限地趋近于" 这类模糊的用语,全不用了. 象增长的量、运动的点和消去高次 无穷小量这类旁注,也全用不着了. 在这个精确的、不含糊的语 言和符号体系中留下的只有: 实数、加法运算(及其逆,减法)和 "小于"关系(及其逆"大于"). 类似地,分析的所有基本概念都可 用实数和它们的基本运算和关系精确地表述.

一系列卓越的数学家在实现魏尔斯特拉斯规划的第一部分中表现出他们的天才,在这里,有两条路可走,第一条是:求得表明实数特征的一组公设,也就是,使实数系作为完全有序域被唯一地确定*,在第28讲末所列出的一组公设基本上完成了此项任

^{*} 依现代抽象代数的语言,即"除了同构以外,唯一地被确定。"

务. 在那讲中我们讲述了关于从这组公设导出微积分方面所获得的数学法上的成就,

实数系逻辑发展的第二条途径比第一条途径要更精巧些;有时,它被称做发生的或定义的途径.只要用实数做出适当的定义,我们就能从实数系公设得到欧几里得几何的一种解释,于是,使得欧几里得几何的相容性依赖于实数系的相容性,实现了这一步,我们就可以问:对于实数系本身,是否也能实现这种步骤.即,是不是只要做出适当的定义,我们就能从某些比实数系公设集更加基础的公设集开始,得出实数系的一种解释.这么一来,实数系的相容性,因而大部分数学的相容性,就依赖于更加基础的公设集的相容性,实际上,这已经做到了:单纯地依靠机敏的定义,用不着任何附加的假定,就从自然数系(简单计数的数)这个更少内涵、更加基础的数系推导出了实数系.

成功地实现这种推导,该归功于魏尔斯特拉斯、R.戴德金(Dedekind, 1831—1916)、G.康托尔(Cantor, 1845—1918)、G. 皮亚诺(Peano, 1858—1932)等人在十九世纪末叶所做的研究. 这些成就使得数学家们对大部分数学的相容性有了相当大的安全感. 这是因为自然数系具有其它许多数系所不具备的直观的简单性,并且,自然数曾被广泛地使用和长时期地被研究,并没有发现任何内在的矛盾.

关于不用任何更多的公设,从基础的自然数系得到实数系的细节,就不在这里讲了.就象哈密顿把复数看作有序实数对并从实数得到复数那样,我们能从自然数得到整数,再从整数得到有理数.再由有理数引出无理数,从而得到完全实数系,这是这条途径的最困难的部分;但是,已经以许多聪明的方法取得成功.*这一步一步的推演过程可用下图表示:

$$N \rightarrow I \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow C$$
.

例如,用戴德会分割,用有有理数端点的区间套,用收敛的有理数序列,或用十进制表达法。

在这里, N表示自然数系, I 为整数系, Q 为有理数系, R 为实数系, C 为复数系. 各种其它推演办法是可能的, 推演时有一条共同遵循的规划, 即:

$$N \rightarrow Q(+) \rightarrow R(+) \rightarrow R \rightarrow C$$

在这里,Q(+)表示正有理数系,R(+)表示正实数系.

有趣的是:上述的这第二种途径反映我们的数系的历史成长过程.人类先用整数,或自然数计数,然后把正分数用于测量,再引进正实数,把不可公度量包括在内(例如正方形的边和对角线),然后知道负数,最后承认虚数.另一方面,上述的第一种途径反映相继的对新数的代数需求.例如,如果a和b是自然数,方程x+a=b总有一个解,就要求我们必须把数系扩展到包括所有的整数.又如,如果a≠0和b是整数,方程ax=b总有一个解,就要求我们必须把数系扩展到包括所有的有理数.虽然如此,这些数对于产生方程x²=2的解还是不充分的,所以,完全的实数系被引进。最后,方程x²=-2无解,除非把复数引进.但是,在这里,我们到达终点,因为已被证明:其系数属于复数域的任何多项式方程在此域内有解——这就是所谓的代数基本定理.

无疑,每一位认真学习数学的学生应该把从自然数系到实数系的细节过一遍。在此小的基底上安放着数学大厦的相容性.古代的毕达哥拉斯学派的信念已被证明是对的(至少就当时涉及的数学来说):万物皆依赖于整数.我们懂得了克罗内克常引用的警语的涵义:"上帝只造了整数,其它一切是人的工作."数学史上的一个确实重要的里程碑,已经达到.

习 题

32.1 (a) 实数x在什么条件下 $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$?

(b) 方程ax=b(a和b为实数)在什么条件下正好有一个实数

解?没有实数解?有无穷多实数解?

32.2 (a) 因为
$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$
, 我们有 $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$.

但是,根据定义, $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$, 因而-1 = +1. 试解释此悖论.

(b) 考虑下列恒等式

$$\sqrt{x-y}=i\sqrt{y-x},$$

它对于x和y的所有值成立。

 $\phi x = a$, y = b, 在这里 $a \neq b$, 我们得到

$$\sqrt{a-b} = i\sqrt{b-a}$$
.

然后令x=b, y=a, 我们得到

$$\sqrt{b-a} = i\sqrt{a-b}$$
.

方程两边相乘,我们得

$$\sqrt{a-b}\sqrt{b-a}=i^2\sqrt{b-a}\sqrt{a-b}$$
.

两边除以 $\sqrt{a-b}\sqrt{b-a}$, 我们最后得

$$1=i^2$$
, $oldsymbol{g} 1=-1$.

试解释此悖论.

32.3 求方程

 $(x+3)/(x^2-1)+(x-3)/(x^2-x)+(x+2)/(x^2+x)=0$ 的 根 的 和.

32.4 大多数学初等数学的学生将同意下列定理:"如果两个 分数相等并且有相等的分子,则它们有相等的分母。"现在考虑下 列问题:我们希望解方程

$$\frac{x+5}{x-7}$$
 - 5 = $\frac{4x-40}{13-x}$

把左边各项加起来,我们得

$$\frac{(x+5)-5(x-7)}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x}$$

或

$$\frac{4x-40}{7-x} = \frac{4x-40}{13-x}$$

根据上述定理,由此得出7-x=13-x,在两边加x, 得7=13. 错在哪里?

32.5 试解释下列悖论,肯定

两边乘以log(1/2), 我们得

$$3\log(1/2) > 2\log(1/2)$$

韯

$$\log (1/2)^3 > \log (1/2)^2$$

因而

32.6 根据标准运算,我们得到

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2.$$

但是函数y=1/x²恒非负; 因此上面的"赋值"不可能是正确的. 试解释此悖论.

- 32.7 令e表示椭圆x²/a²+y²/b²=1的离心率. 大家都知道: 从该椭圆左边焦点到该曲线上任何一点P(x, y)的径向量的长r,由r=a+ex给出. 于是dr/dx=e. 因为没有哪个x的值能使dr/dx=0,由此得出: r没有极大值或极小值. 但是, 径向量没有极大值或极小值的唯一的闭曲线是圆. 由此得出: 每一个椭圆是圆.试解释此悖论.
 - 32.8 试解释本讲中涉及级数 S 的谬论,
- 32.9 任何整数,无论它是正的、零、或是负的,可被表示为两个自然数m和n的差m-n; 如果m>n,则m-n是正整数;如果m=n,则m-n是零整数;如果m<n,则m-n是负整数.这暗示:把整数作为有序的自然数对(m,n)合乎逻辑地引进的思想;

在这里,写(m, n)时,实际上我们心目中想的是差m-n. 用有序自然数对的这种解释,我们该怎样定义这些有序对的相等,加法和乘法?

32.10 任何有理数(正的,零,或负的)可被表达为 m和 $n(n \neq 0)$ 两个整数的商m/n; 事实上, rational(有理的)这个词就来源于此事实. 这暗示: 把有理数作为有序整数对 $(m,n)(n \neq 0)$ 合乎逻辑地引进的思想; 在这里,写(m,n)时,实际上我们心目中想的是商m/n. 用有序整数对的这种解释,我们该怎样定义这些有序对的相等,加法和乘法?

参考 文献

COURANT, R., and H. ROBBINS, What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods. New York: Oxford University Press, 1941.

GOFFMAN, C., Real Functions. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1953.

HENKIN, LEON, W. N. SMITH, V. J. VARINEAU, and M. J. WALSH, Retracing Elementary Mathematics. New York: Macmillan, 1962.

LANDAU, E. G. H., Foundations of Analysis: The Arithmetic of Whole, Rational, Irrational and Complex Numbers, trs. by F. Steinhardt. New York: Chelsea, 1951.

LEVI. H., Elements of Algebra. New York: Chelsea, 1954. RITT, J. F., Theory of Functions, rev. ed. New York: King's Crown Press, 1947.

第 33 讲

再 挖 深 些

几乎没有人没注意到:在过去的几讲中,"集合"这个词用得越来越多.这个词已经成为数学中最重要和最基本的术语之一.它已经成为所谓"新数学"规划的核心;而"新数学"规划已经渗入初等数学的教学,今天每一个上学的少年,从最低班一直到大学一年级,在数学课上,总是一再遇到集合概念,简直达到了令人厌烦的程度.几乎没有一个中学数学课程或数学课本不是从讨论集合的概念和讨论基本的集合记号开始的.为什么对集合要费这么大劲呢?我们将看到:关于这,有两点理由.

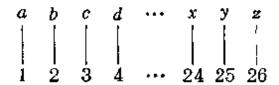
在前一讲中我们指出过:实数系能靠单纯定义的方法从自然数系得到;并且,大部分数学的相容性可奠基于此最基本的数系的相容性之上.自然会提出疑问:这种定义的演进的起点是否可以被推到更深的水平.数学家们已经证明这是可能的——我们能从集合论开始,集合论的诸概念已经蕴涵于自然数系公设的演进之中,并且,能以纯粹定义的方法得到能起自然数作用的对象.我们自然应该从集合论的严谨的公设推导开始.这个规划内容太丰富了,我们不能在这里详细地讲,但是,象小学生所易于接受的那样,以直观方式引进集合论,我们就能说清楚:自然数是怎样由集合概念的术语定义的.由于这么做取得了成功,大部分数学的相容性已被证明奠基于集合论的相容性之上.集合在数学中处于很重要的地位——集合论在某种意义上是整个数学最坚实的基础*——的两点理由之一就在于此.

^{*} 逻辑学家曾以用命题演算为基础推导集合论的方法把上述的定义推导的开始 层次推向更深,到今天为止在这方面所作的最著名的工作是怀特海 (Whit ehead)和罗素 (Russel) 的巨谐《数学原理》(Principia mathematica),将在下一讲中对此重要著作作进一步的讲述。

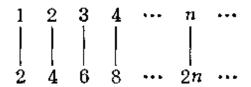
我们现在简短地叙述一下:自然数是怎样由集合概念引出的. 我们采用在今天中学教的集合论的基本思想和符号.先讲几个定义是恰当的.

定义1 A和B两个集合被说成是一一对应的,当我们有A的元素与B的元素的一种配对,使得A的每一元素与B的一个元素且仅与其一个元素对应,并且B的每一元素与A的一个元素且仅与一个元素对应时。

例如,在所有英文字母的集合和前26个正整数的集合之间存在一一对应,因为我们可以作下列配对:



当然,这两个集合的元素有许多其它允许的配对法;我们可以让 这26个相继的英文字母与头26个正整数的任一种排列中相继的数 相配对.作为另一个例子,在所有正整数的集合和所有偶整数的 集合之间存在一一对应,因为我们可以作下列配对:



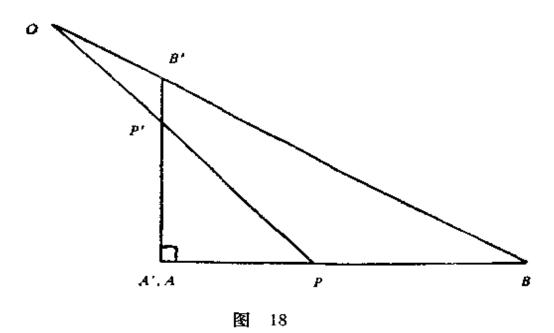
又如,在线段AB的点的集合与另一线段A'B'的点的集合之间存在一一对应,因为我们可作图18中示意的配对.

定义2 A和B两个集合被说成是相等的,并且,我们写作 A -B,当且仅当它们能作一一对应。

这么一来,全部英文字母的集合和前26个正整数的集合是相等的,所有正整数的集合和所有偶整数的集合也是相等的,一线段上点的集合与另一线段上点的集合也是相等的.

现在我们以下列定义把数的概念引进集合论.

定义3 两个相等的集合被说成是有相同的基数,所有象集合 {a}这样有相同基数的集合被说成是有基数一(或包括一个元素);



所有象集合 $\{a, a'\}$ 这样有相同基数的集合被说成是有基数二(或包括两个元素): 所有象集合 $\{a, a', a''\}$ 这样有相同基数的集合被说成是有基数三, 等等. 我们将以 1, 2, 3…表示基数一, 二, 三, ……*.

基数好象是集合的特征值.换句话说,三个苹果和三个梨具有一个共同的性质,我们以"三"表示之.G.弗雷格于1879年,罗素于1901年,和其他许多追随他们的逻辑学家一道,采用定义3的思想,他们把集合S的基数定义为所有与集合 S 相等的集合的集合.按照此定义,三是所有包括三个元素的集合的集合.

定义 4 一个非空集合被说成是有限的,当且仅当其基数是基数1,2,3,…中的一个.一个集合,它既不是空的,又不是有限的,就称做是无限的.

现在有可能(并且毫不困难)证明:上面定义的有限的基数可作为对自然数的一种解释,而它们过去是由数学家们所设计的一组公设来表征的.然后得出:如果集合论是相容的,则自然数系也是相容的.集合论在当今数学中的极端重要性的第二个理由是,如果数学概念可由集合概念和集合理论生成或者可由它们来描

^{*} 此定义事先假定认识不同对象的能力.

述. 这方面我们将给出两个重要的例子,它们每一个都构成数学 史上的里程碑。

我们首先考虑空间的观念和空间的几何.这些观念自古希腊时代以来经历了显著的变化.对于希腊人来说,有一个唯一的空间,与之相联系有唯一一种几何,这些是绝对的概念.空间不被想象为点的集合,而被想象为一个区域或轨迹,在其中,对象可被自由地移动和彼此比较.从这个观点看,几何中的基本关系是全等或叠合的关系.

随着十七世纪解析几何的发展,空间才被看作点的集合.随着十九世纪经典非欧几何的创立,数学家们才承认有多于一种几何.但是,空间仍被看作图形能在其中彼此比较的轨迹.空间到自身的全等变换群的思想成为中心思想,几何才被看作是对点的构形的某种性质的研究,这种性质当闭空间受到变换时保持不变.在第31讲中我们已经看到:F.克莱因在他1812年的爱尔兰根纲领中是如何发展此观点的.在爱尔兰根纲领中,一种几何被定义为一个变换群的不变量理论.此概念综合和推广了几何学的所有早期的概念,并且为许多重要的几何提供了一种非常简洁的分类.

十九世纪末,形成这样的思想:一个数学分支不过是由一组公设演绎出的一套定理;而一种几何,以此观点看,不过是数学的一个特殊分支.许多种几何的公设集被研究,但是,爱尔兰根纲领并没有被推翻,因为一种几何可被看作是变换群的不变量理论的一个数学分支.

1906年弗雷谢 (Maurice Frechet, 1878—1973) 开创了抽象空间的研究.产生了非常一般的几何,它们不必适合克莱因的简洁的分类.一个空间只不过是一些对象(通常称作点)连同这些点被蕴含于其中的一组关系的集合,而一种几何就成了这样一个空间的理论.点受其限制的这套关系被称做空间的结构,而这个结构可以是也可以不是能用变换群的不变量理论解释的.虽然抽象空间于1906年首次被正式地引进,但把几何当作对具有重叠结

构的点集合的研究的思想,早在1854年黎曼就在其著名的见习讲演中谈到。

作为空间和空间的几何的这种进一步一般化的一个例子,我们现在讲述弗雷谢1906年创立的抽象空间。在许多熟悉的几何(例如欧几里得几何)中,有两点之间距离的观念。这个概念被弗雷谢推广到所谓度量空间中,这是借助于集合论概念完成的。

定义M 度量空间是元素(称做点)的集合M,其中定义了一个距离函数d(x,y)或称做空间的度量,这个距离函数把M的每一对点x和y相联系,并满足下列四条公设。

M1 $d(x, y) \geqslant 0$.

M2 d(x, y) = 0, 当且仅当x = y.

M3 d(x, y) = d(y, x).

M4 $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$,

在这里,x,y,z是M的任何三个(不一定不同的)点.(一般称之为三角不等式).

度量空间的例子有:

- 1. 所有实数的集合M,在其中,距离函数由d(x,y)=|x-y|定义.此空间的一个简单的形象化的解释是一条直线上所有点的集合,两点间距离的概念是普通意义上的.
 - 2. 所有有序实数对的集合M,其中距离函数由 $d(p_1p_2) = \{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)\}^{1/2}$

定义, 在这里,

$$p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2).$$

学过平面解析几何的学生能认出来: 其形象化的解释就是欧几里得平面上所有点的集合,两点间距离的概念是欧几里得的.

3. 所有有序实数对的集合M,其中距离函数由

$$d(p_1, p_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

定义,在这里,

$$p_1 = (x_1, y_1) \quad p_2 = (x_2, y_2)$$
.

用在笛卡儿平面上插点的办法易于看出,为什么这个空间常称为出租汽车空间.例2和例3表明:十分不同的度量空间可以具有相同的作为基础的集合M.

4. 所有的无穷的实数序列 $x = \{x_1, x_2, \cdots\}$ 的 集 合 M: 对于这些实数,无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ 是收敛的,距离函数由

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \{(x_1 - y_i)^2\}^{1/2}$$

定义. 度量空间的这个例子在实函数论的研究中是重要的,并被称做希尔伯特空间。

我不准备在这里证明上述四种空间是度量空间,给例1和例3 作出证明是容易的,但是,为例2和例4作证明较困难,

另一种重要的抽象空间是所谓豪斯多夫空间.

定义H 豪斯多夫空间是元素 (称做点)的集合H,连同这些点的某些子集合(通常称之为邻域)族,并且它们满足下列四条公设:

H1 对于H的每一个点x,至少对应一个邻域 N_x ,在这里,符号 N_x 意指 xeN_x .

H2 对于 x 的任何两个邻域 N_* 和 N_* ,存在一个邻域 N_*' 使得 $N_*''c(N_*\cap N_*')$.

H3 如 y 是 H 的一个点,使得 YeN_z ,则存在 y 的一个邻 域 N_y ,使得 $N_y \subset N_z$.

H4 如 $x \neq y$,则存在一个 N_x 和一个 N_y ,使得 $N_x \cap N_y = \phi$.

为了有助于理解豪斯多夫空间的公设,令H为直线上所有点的集合,并且选以 × 为中点的该直 线上的线段为H的一个点的邻域。易于证明上述公设被点和邻域的此种解释所满足;这么一来,我们就有了豪斯多夫空间的一个例子.豪斯多夫空间的算术复本,在分析的研究中是很重要的.

如果x是度量空间M的任何一点,我们称M的能使d(x,y) < r(在这里,r是正实数)的所有点的子集为以x为中心、以r为半径

的开球.易于证明:把M的所有开球选作邻域,就能把任何度量空间M做成一个豪斯多夫空间.

作为抽象空间的最后一个例子,我们来讲所谓拓扑空间,它 的结构很简单又很基本.

定义 T 拓扑空间*是元素(称做点)的集合 T,连同这些点的子集合(称做开集)族 开集满足下列三条公设:

- T1 T和空集 ϕ 是开集.
- T2 任何多个开集的并是开集.
- T3 任何两个开集的交是开集,

不难证明:一个拓扑空间如果对于任何两个不同的点x和y,存在分别包括x和y的不相交的开集 S_x 和 S_y ,则它是以此开集为邻域的豪斯多夫空间。

抽象空间在现代数学研究中变得非常重要,1906年弗雷谢引进它们这件事,确实标志数学史上的一个里程碑。

对有重叠结构的个别集合的情况已经给予了适当的注意,现 在我们简短地看看成对的相关集合.大量数学理论涉及两个相关 的集合.这导致函数的概念,导致称做函数论的精巧的数学分 支.

函数的概念同空间和几何的概念一样,经受了有趣的变革. 学数学的学生,在他们从中学的初等的和直观的课程进展到大学 水平的高等的、复杂的课程时,常遇到此变革的多种精制品.

函数观念的历史提供了关于数学家们有推广并扩展他们的概念的癖好的例子。"函数"一词由莱布尼茨(Leibniz, 1646—1716)于1694年以拉了文形式引进,最初似乎是用来表示与曲线有联系的任何量(例如,曲线上点的坐标,曲线的斜率,曲线的曲率半径,等等)。伯努利(Johann Bernoulli,1667—1748)1718年曾把函数看作是由一个变量和一些常数做成的任何表达式; 欧拉(Euler,1707—1783)稍迟些,把函数看作是包含变量和常数的任何方程

^{*} 拓扑空间的定义在本进中并不一致。

或公式.这后一思想正是许多学初等数学课程的学生形成的函数概念.我们熟悉的记号f(x),最初并没有用,是A.C.克雷罗(Clairaut,1713—1765)和欧拉在1734年左右才引进的.

欧拉的函数概念,直至傅里叶1807年在关于热流的研究中考虑所谓三角级数之前,没有什么变化.三角级数,正如我们在第25讲中已见到过的,蕴涵变量间的比以前研究过的更为一般的关系.L. 狄利克雷(Dirichlet. 1805—1859)试图提出一个包括这种关系的足够广泛的函数定义,他在1837年完成了柯西(1789—1857)较早坚持的观点,得到下列的表述:一个变量是表示一个数集中任何一个数的符号,如果两个变量**和**对有这样的关系:每当给**指定一个值,根据某种规则或对应就自动地给**指定一个值,规据某种规则或对应就自动地给**指定一个值,则我们说**是**的(单值)函数.变量**,它的值是由我们任意指定的,被称做独立变量,变量**,它的值由**的值决定,被称做相关变量.** 可取的允许值构成函数的定义域,** 》所取的值构成函数的值域。学数学的学生在初等微积分的课程中,常遇到狄利克雷的函数定义。这是一个很广泛的定义。它不是专指能用某种解析表达式表示的**和**之间的关系,它强调两个数集之间的关系的基本思想。

集合论已经自然地把函数概念推广到包括任何两个元素(元素是数或任何别的事物)的集合之间的关系.于是,在集合论中,函数f被定义为任何有序元素对的集合,使得:如果 $(a_1, b_1) \subseteq f$, $(a_2, b_2) \subseteq f$,并且 $a_1 = a_2$,则 $b_1 = b_2$.这些有序对的所有第一个元素的集合A被称做函数的定义域:这些有序对的所有第二个元素的集合B被称做函数的值域.这么一来,函数关系就不是什么别的,只不过是笛卡儿乘积集 $A \times B$ 的特种子集.也可以说,一一对应是这样一种函数,即函数f,使得:如果 $(a_1, b_1) \subseteq f$, $(a_2, b_2) \subseteq f$,并且 $b_1 = b_2$,则 $a_1 = a_2$.如果对于函数关系f, $(a, b) \subseteq f$,我们写b = f(a),读作b是f在a的值.

函数的观念渗入大部分数学,本世纪上半叶许多有影响的数 学家曾倡导利用此概念作为组织初等数学课程的统一的和中心的 原理. 此概念看来自然而有效地指导着选择和开发教材. 毋庸置疑, 让学数学的学生早些熟悉函数概念是很有好处的. 用集合论将函数概念一般化标志数学史上的一个里程碑.

连续性可直接与函数的概念相联系,如果此研究是在由一个邻域系定义的空间 A和B进行的话.事实上,函数 f 可被说成是在 A 的a点是连续的,如果,对于任何邻域N。 $\subset B$ (在这里,b是B的与A的给定的a点相联系的点),存在邻域 N。 $\subset A$,使得:对于任何 $z \in N_a$, $f(z) \in N_a$.

在总结本讲时,我们可以指出:我们已经注意到十九世纪末、二十世纪初的两项卓越的成就:(1)集合论可被取作数学的基础,(2)许多数学概念能用集合概念和记号来推广,并给出简要的定义.由于这两项重大成就,许多教师已经认识到集合论在早期数学数学中应该占有首要的和基本的地位.于是,在中学教学中创立了所谓"新数学"规划.每当对此规划说许多好话时,必须承认在十分热心地实现这项规划时,也有许多过失.新数学规划的后果向我们揭示:不能为了在中学数学中讲集合论而讲集合论,而只应当在确实能使数学易懂和简化时才采用这些概念.总之,在这里我们要稳健地作出判断.例如,在初等几何中,是说"同一平面的两条直线被说成是平行的,当且仅当它们不相交"好呢,还是说"两条直线加和n,使得加厂和并且nC和(在这里,和是某平面),被说成是平行的,当且仅当加厂n=中"好?

习 题

- 33.1 线段AB的一个端点A(或B)属于或不属于该线段,我们将分别以方括号或圆括号表示.把此记号用上,证明:线段[AB],(AB],[AB),(AB)作为点的集合,是彼此相等的.
- 33.2 证明:包括有限线段的点的集合和包括无限线段的点的集合是彼此相等的.

- 33.3 戴德金把无限集合定义为与其真子集相等的集合,试用戴德金的定义证明,包括一个线段的点的集合是一个无限集合,
- 33.4 证明:如果d(x, y)是点的集合M的距离函数,则我们还可以把
 - (a) kd(x,y)(在这里, k是正实数),
 - (b) $\sqrt{d(x,y)}$,
 - (c) d(x, y)/[1+d(x, y)]

作为M的距离函数.

- 33.5 (a) 证明:任何元素的集合M都可做成度量空间,只要令d(x,y)=1,如果 $x\neq y$, d(x,y)=0,如果x=y.
 - (b) 证明: 所有有序实数对的集合M, 其中距离函数由 $d(p_1, p_2) = \max([x_2-x_1], [y_2-y_1])$

定义,在这里, $\rho_1=(x_1,y_1),\rho_2=(x_2,y_2)$,是度量空间.

- 33.6 (a) 证明: 平面上所有点的集合可做成豪斯多夫空间, 只要把所有以P为圆心的圆的内部选作P点的邻域。
- (b) 证明: 平面上所有点的集合可做成豪斯多夫空间,只要把所有以P为中心并且其边平行于该平面上两条给定的互相垂直的直线的正方形选作P点的邻域.
- (c) 证明: 任何点的集合可做成豪斯多夫空间,如果我们把 这些点本身选作邻域.
- 33.7 (a) 令T为三个不同的点A、B、C,并且令T的开集为 ϕ , $\{A\}$, $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, T.试证明: T是拓扑空间.
- (b) 证明: (a)中的T不是豪斯多夫空间,如果T的开集被选作邻域的话。
- 33.8 豪斯多夫空间H的点x被称做H的子集S的极限点,当且仅当x的每一个邻域至少包括S的一个不同于x的点. 证明: 豪斯多夫空间的集合S的一个极限点的任何邻域 N_x 包括S的无限多个点.
 - 33.9 证明本讲正文中的例1和例3是度量空间.

- 33.10 (a) 证明: 度量空间的任何子集, 对于同一距离函数, 是度量空间.
- (b) 证明:任何度量空间M可做成豪斯多夫空间 H,只要把 M的所有开球选作邻域.
- (c) 证明:如果在一个拓扑空间中,对于任何两个不同的点 x和y,存在分别包括x和y的不相交的开集S,和 S,,则此拓扑空间以开集为邻域,是一个豪斯多夫空间.
 - 33.11 证明:对于度量空间的四条公设可由下列两条替代:
 - M'1 d(x,y)=0, 当且仅当x=y.
- M'2 d(x,z) ≤ d(z,y) + d(y,x), 在这里, x, y, z 是M 的任何三个不一定不同的点.
- 33.12 在初等数学中,只考虑有限几种函数.因此,在初等数学中,"函数"的典型定义可表述如下:一个函数是一条规则, 它对某组数中的每一个数指定一个且只指定一个数.
- (a) 证明: 此定义是本讲正文中给出的更加一般的集合论定义的一个特殊情况.
 - (b) 在此初等的函数概念中,什么构成定义域?
 - (c) 什么构成初等数学中定义的函数的值域?
- (d) 在什么意义上,能把方程F = (9/5)C + 32看作初等数学中的函数?
- (e) 在什么意义上能把表示在某些年的每一年中某课程不及 格的学生数的条线图看作初等数学中的函数?
 - (f) 在什么意义上,三角函数表可被看作初等数学中的函数?
- (g) 将函数同顶上装有漏斗,底部装有喷口的机器相比较. 原料通过漏斗输入机器.然后,机器把原料转化为产品,由机器 的喷口射出.

参考文献

BAUM, J. D., Elements of Point Set Topology. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1964.

FREGE, GOTTLIEB, The Foundations of Arithmetic. Oxford: Basil Blackwell Mott, 1950.

HANSDORFF, FELIX, Set Theory. tr. by J. R. Aumann. New York: Chelsea, 1957.

MENDELSON, BERT, Introduction to Topology, 2nd ed. Boston: Allyn and Bacon, 1968.

ROTMAN, B., and G. T. KNEEBONE, The Theory of Sets and Transfinite Numbers. London: Oldbourne, 1966.

RUSSELL, BERTRAND, Introduction to Mathematical Phitosophy. London: George Allen and Unwin, 1956.

第 34 讲

有限之外

自古希腊以来,数学家和哲学家就对无穷和无穷集合的概念 苦思冥想.芝诺的悖论是他们遇到的某些困难的早期迹象.有些希 腊学者,其中有亚里士多德和普罗克鲁斯,承认这个事实,即集合 可被做得越来越大,大得没有界;但否认完成的无限集的存在.中 世纪的哲学家都参加过关于潜无穷和实无穷的讨论.应该指出: 是某些无穷集合的比较导致悖论.例如,两个同心圆周上的点可 以通过联系公共半径上的点作出一一对应,虽然,一个圆周比另 一个圆周长,并且看来一个比另一个包括较多的点.

伽利略致力于无穷集合的研究,但是,他也认为.完成的实 无穷必须被排除.他在1638年的《两门新科学》中指出:两条不相 等线段上的点可通过一线段到另一线段的简单射影作 成一一对 应,因此这两条线段大概也就包括同样多的点;虽然,一条线段比另一条长,并且看来一条比另一条有较多的点。他还指出:正整数与它们的平方数可作成一一对应,只要让每一个正整数与其平方数相配对;虽然,正整数的平方数的集合只构成所有正整数的集合的一部分。这些令人困扰的悖论的产生,就是由于我们假定了完成的无限集合的存在;为了避开这些悖论,我们必须拒绝承认完成的无限集合的思想。

高斯在其1831年7月12日给施马赫尔的著名的信中写道:"我反对把无穷量作为现实的实体来用,在数学中这是永远不能允许的.无限只不过是一种说话方式,我们说极限指的是:某些比可以随意地接近它,而其它的则被允许无界地增加。"柯西,和其他许多人,也拒绝承认完成的无限集合的存在,其根据就是有这类悖论:一个完成的无限集合能与其本身的真正部分建立一一对应、虽然数学家要处理无穷集合,例如无穷级数、实数、自然数,等等,但是,他们一般都避开存在完成的集合的假定后面的麻烦问题.当数学家最终不得不面对确立分析的严谨的问题时,就再也不能忽视或巧妙地避开这类事了.

- B.波尔查诺(Bolzano,1781—1848)在他于逝世后三年的1851年发表的《无穷的悖论》(Paradoxes of the Infinite)中,对于承认无穷集合的现实存在性首先采取肯定的步骤.他说,一个无穷集合与它的真正部分能做成一一对应这个事实必须简直作为事实被承认.但是,波尔查诺的关于无穷的著作,虽然有突破性,整个地说其哲学内容多于数学内容.对无穷集合的真正的数学处理,在康托尔于接近十九世纪末写出其重要著作之前,没有出现.
- G.康托尔(Cantor)的双亲是丹麦人,1845年出生于俄国圣彼得堡,1856年随其双亲迁到德国法兰克福.康托尔的父亲原来信犹太教后来转为信新教,他的母亲出生于卡托里克(Cath'olic),这孩子对中世纪神学及其关于连续和无限的艰深的辩论产生了浓厚的兴趣.结果他把父亲要他好好学习工程的意见丢在一边,而

专心致志地探讨哲学、物理学和数学.他到苏黎世、哥廷根和柏林学习,就是在柏林,他受到魏尔斯特拉斯的影响,并于1869年获得博士学位.然后,他从1869年到1905年在哈雷大学从事了多年的教学工作.他于1918年死于哈雷的精神病院中.

康托尔先是对数论、不定方程和三角级数发生兴趣.看来,关于三角级数的特巧理论曾激励他去探讨分析的基础.他对无理数作出了漂亮处理——它利用收敛的有理数序列,根本不同于戴德金的受几何的启发的处理方法——并于1874年开始写其关于集合论和无穷论的革命性的著作.在此较迟的著作中,康托尔创立了数学研究的一个全新领域.他在其论文中,以对实无穷所作的数学处理为基础,发展了超限数理论,并且创立了类似于有限数算术的超限数算术.

康托尔虔诚地信仰宗教,并且,他的著作,在某种意义上是与芝诺悖论有联系的争论的继续,反映他对中世纪学院派关于无限的本质的沉思的同情.他的观点遇到相当大的反对,这主要来自柏林大学的L.克罗内克(Kronecker, 1823—1891).坚决反对康托尔获得柏林大学的教学职位的也是克罗内克.今天,康托尔的集合论几乎已经渗入数学的每个分支,并且,已被证明,在拓扑学和实函数论的基础中处于重要地位.存在逻辑上的困难,并且,悖论已经出现.二十世纪在希尔伯特领导的形式主义者和布劳威尔领导的直觉主义者之间的争论,本质上是康托尔和克罗内克之间的争论的继续.在后面,我们将更深一步探讨这些事.

在前一讲中,我们见到:有限集合的基数与自然数是等同的. 无限集合的基数被人们称做超限数. 康托尔的超限数理论发表于 1874到1895年的一系列重要论文中,并且,其绝大部分发表于德 国数学杂志《数学年刊》(Mathematische Annalen) 和《数学杂志》 (Journal für Mathematik)上.

在康托尔的研究之前,数学家们只考虑过一个无穷,以符号 ∞表示,并且不加辨别地把此符号用来表示象所有的自然数、所 有的实数和给定线段上所有的点等这样一些集合的元素的"数目".康托尔的著作引进了全新的观点,并且,使我们得到了无穷的量度和算术.由于出现于康托尔著作中的某些概念的异乎寻常的大胆,由于其著作给出的证明的奇特方法,康托尔的超限数理论难以形容地令人神往.它确实构成数学史上的里程碑.让我们简短地讲述一下这个重要的理论.

我们采用前一讲中给出的基本原理: 相等的集合具有相同的基数. 当所考虑的集合是无穷集合时,此原理向我们显示出许多有趣而又格外吸引人的情况. 例如, 伽利略的观察(用n←→n²对应可使正整数的所有平方数的集合等于所有正整数的集合)表明,可以给这两个集合指定同一个基数. 并且, 从这个观点看, 我们必须说, 正整数的平方数和所有正整数一样多. 由此得出: 欧几里得公设说的"整体大于部分", 当所考虑的是无穷集合的基数时就不对了.

我们将规定所有自然数的集合的基数为d,*并且说任何有此基数的集合是可数的,由此得出:集合S是可数的,当且仅当其元素可被写成无穷序列 {s₁, s₂, s₃…}.易于证明:任何无限集合包括一个可数子集;因此,d是"最小的"超限数.

康托尔在他的一篇早期的关于集合论的论文中证明两个重要 集合的可**数性**,初看,很难看出它们会具有此性质.

第一个集合是所有有理数的集合. 此集合有称做稠密的重要性质. 这指的是: 在任何两个不同的有理数之间存在另一个有理数——事实上, 也就存在无穷多其它有理数. 例如, 在0与1之间有有理数

 $1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, \dots, n/(n+1), \dots,$

在 0 与1/2之间有有理数

 $1/3, 2/5, 3/7, 4/9, 5/11, \dots, n/(2n+1), \dots, 1$

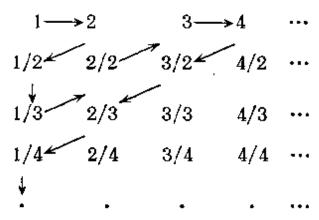
在 0 与1/3之间有有理数

^{*} 康托尔用希伯来字母aleph带上脚码零(光。)表示此基数.

 $1/4, 2/7, 3/10, 4/13, 5/16, \dots, n/(3n+1), \dots$

等等.由于此性质,我们可以指望所有有理数的集合的超限数大于d.* 康托尔证明:情况并非如此;相反,所有有理数的集合是可数的.现将他的这个有趣的证明写在下面:

定理 1 所有有理数的集合是可数的。 考虑阵列



在其中,第一行依数量的次序包括所有自然数(即,所有分母为1的正分数);第二行依数量的次序包括所有分母为2的正分数,第三行依数量的次序包括所有分母为3的正分数,等等.显然,第一个正有理数都出现于此阵列中,并且,如果我们按箭头所示的次序,删去已经出现过的数,把这些数列出来,我们就得到一个无穷数列

在其中,每一个正有理数出现一次且仅出现一次.以 $\{r_1, r_2, r_3, \cdots\}$ 表示此数列.则数列

$$0, -r_1, r_1, -r_2, r_2, \cdots$$

包括所有有理数的集合,并且,此集合的可数性也已确立.

康托尔所考虑的第二个集合是乍一看比有理数集合大得多的数集.我们先给出下列定义.

^{*} 集合A的基数被说成是大于集合B的基数,当且仅当B等于A的真子集,而 A 不等于B的真子集。

定义 1 复数被称做代数数,如果它是某多项式方程 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$

的根的话(在这里, $a_0 \neq 0$,并且,所有 a_* 是整数). 不是代数数的复数,被称做超越数.

十分明显,代数数包括所有有理数及其根.因此,下列定理 有点令人惊讶.

定理 2 所有代数数的集合是可数的.

令f(x)为定义 1 所讲的那种多项式,在这里,不失一般性,我们假定 $a_0 > 0$. 考虑由

$$h = n + a_0 + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n|$$

定义的所谓多项式的高.显然,h 是>1 的整数,并且,很清楚,对于给定的高h只有有限多个多项式.因此,由给定高h的多项式产生的代数数只有有限多个.现在我们通过先取高为1的多项式产生的代数数,再取高为2的多项式产生的代数数,然后再取高为3的多项式产生的代数数,等等,把重复的数删去,就可以(在理论上说)把所有的代数数列出.于是,我们看到,所有代数数的集合可被列成一个无穷序列,因而,此集合是可数的.

从上面两个定理看,还有这么个可能:所有无穷集合是可数的,其实,不是这么回事;康托尔以其对下列有意义的定理所作的卓越的证明说明这一点.

定理3 在0<x<1的区间中的所有实数的集合是不可数的.

此证明是间接的,采用了称做康托尔对角线程序的不寻常的方法.我们先假定此集合是可数的.于是,我们可将此集合的数排成序列 $\{p_1, p_2, p_3, \cdots\}$.这些数 p_i 的每一个能被唯一地写作不尽十进制分数,回想起,每一个有理数可被写成"循环小数"是有用的,例如,0.3这么个数,就能写作 $2.9999\cdots$.这样,我们就能将此序列安排成下列阵列:

$$p_1 = 0 \cdot a_{11} a_{12} a_{13} \cdots$$

$$p_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$$

 $p_3 = 0 \cdot a_{31} a_{32} a_{33} \cdots$

在这里,每一个符号 a_{ij} 表示数码0,1,2,3,4,5,6,7,8,9中的某一个. 然后,不管我们怎样仔细地排列0与1之间的所有实数,总有一个数没有排上. 这个数是 $0.b_1b_2b_3$ …,在这里,比如说, $b_k=7$ 如果 $a_{kk}\neq7$,并且 $b_k=3$,如果 $a_{kk}=7$,对于 $k=1,2,3,\dots,n$,…. 此数明显地处于0与1之间,并且,它必定不同于每一个数 p_i ,因为它至少第一位与 p_i 不同,至少第二位与 p_i 不同,至少第三位与 p_i 不同,等等.这么一来,原来的假定: 0与1之间的所有实数能被排进一个序列中,就做不到;所以,此集合必定是不可数的.

康托尔还由定理2和3推导出下列重要推论.

定理4 存在超越数.

因为,根据定理3,0与1之间所有实数的集是不可数的,肯定地推出:所有复数的集合也是不可数的.但是,根据定理2,所有代数数是可数的.由此得出:必定存在不是代数数的复数;于是,此定理得证、

不是所有的数学家乐意接受定理3和4的上述证明.对这两个证明接受与否,以他相信的数学上的存在是什么为转移.有些数学家认为:仅当存在成问题的对象之一被现实地构造和展示出来时,才可以说数学上的存在被建立.然而,例如,上述定理4的证明,并没有用做出一个超越数的特例来建立起超越数的存在.数学中的许多存在性证明就是这种非构造性的;在这些证明中,存在性只是靠证明不存在的假定导致矛盾*来证明的.由于有些数学家对非构造性的证明不满足,许多人致力于:以实际地生成一个所考虑的对象给出新的证明.

超越数存在的证明和某特殊数是超越数的证明是迥然不同的

^{*} 超越数存在的构造性证明于1851年,在康托尔发表其非构造性证明之前二十多年,由刘维尔(Joseph Liouville,1809—1882)给出。

两回事,并且后者是很难的问题.1873年证明自然对数的底e是超越数的,是C.埃尔米特(Hermite,1822—1901);1882年首次证明和的超越性的是林德曼(Lindemann,1852—1939).遗憾的是,要在这里证明这些有趣的事是不方便的.但是,把视野再扩大些,这些成就的每一个都应该被看作是数学史上的里程碑.鉴别一个特殊的给定的数是代数数还是超越数,是困难的.这从下列事实就可看出.至今还不知道和"是代数数,还是超越数.这方面的最新成就是.建立了形为46的任何数的超越性的特征(在这里,4是不等于0和1的代数数,b是任何无理的代数数).这一结果几乎是三十年来试图证明所谓希尔伯特数2^{√2}是超越数的努力的顶峰.

因为在0~x~1 区间中的所有实数的集合是不可数的,此集合的超限数大于d.我们以c表示该集合之超限数.一般相信,c是继d之后的次一个超限数,即,没有那样的集合,其超限数大于d而小于c.此信念被人们称之为连续统假设.但是,不管怎么努力,也没找到它成立或不成立的证明.从此假设已经推导出许多结论.1940年左右,奥地利逻辑学家K.哥德尔(Gödel,1906—1978)成功地证明了:连续统假设与集合论的著名的公理系统是相容的,只要此公理系统本身是相容的. 哥德尔猜想: 连续统假设的否定与集合论的公理也是相容的. 此猜想于1963年由斯坦福大学的P. J.科恩(Cohen)证明.于是,也就证明了: 连续统假设独立于集合论的公理系统,因而永远不能从这些公理导出. 此情况类似于平行公理在欧几里得几何中的处境.

已被证明: 所有定义在0<x<1区间上的单值函数 f(x)的集合有大于c的基数,但是,此基数是否继c之后的次一个,还不得而知. 康托尔的理论提供超限数的一个无穷序列,并且已经有一些实例表明确实存在无数大于c的超限数.

习 题

- 34.1 (a) 证明: 有限多个可数集合的并是可数集合.
- (b) 证明: 可数多个可数集合的并是可数集合.
- (c) 证明: 所有无理数的集合是不可数的.
- (d) 证明: 所有超越数的集合是不可数的.
- 34.2 (a) 证明: 1是唯一的高为1的多项式.
- (b) 证明: x和2是仅有的高为2的多项式.
- (c) 证明: x^2 , 2x, x+1, x-1和 3 是仅有的高为3 的多项式, 并且,它们生成不同的代数数0, 1, -1.
- (d) 做出高为4的所有可能的多项式,并且,证明它产生的新代数数仅为-2, -1/2, 1/2, 2.
 - (e) 证明: 高为5的多项式产生12个新的实代数数.
- 34.3 (a) 证明: 线段AB上的所有点的集合是不可数的;现给出此证明之轮廓,试完成其细节.

取AB的长为1单位,并假定AB上的点构成一个可数集合.于是,AB上的点可被排列成序列{P₁,P₂,P₃,…}.以长为1/10的区间覆盖P₁点,以长为1/10²的区间覆盖P₂点,以长为1/10³的区间覆盖P₃点等等.由此得出.单位区间AB可被长为1/10,1/10²,1/10³,…的无穷的子区间序列所完全覆盖(这些子区间可能交迭).但是这些子区间的长度的和为

$$1/10+1/10^2+1/10^3+\cdots=1/9<1$$
.

- (b) 选(a)中的子区间的长为6/10, 6/10², 6/10³, …,(在这里,6是任意小的正数),证明:可数的点集可被区间的集合所覆盖,这些区间的长的总和可任意小、(用测度论的术语,我们说可数的点集有零测度。)
- 34.4 令 E_1 为单位线段上所有点的集合,令 E_2 为单位正方形上所有点的集合. E_1 上的点Z可由0与1之间的一个无穷小数Z=

 $0.z_1z_2z_3$ …所指定, E_2 上的点P可由每一个小数都处于 0 与 \mathbb{C} 之间的一个有序无穷小数对

$$(x=0,x_1x_2x_3\cdots,y=0,y_1y_2y_3\cdots)$$

所指定. 假定我们令这些表达式中的 z_1 , x_1 , y_2 或表示非零数码,或表示前面带有零的非零数码. 例如,如果 $z=0.73028007\cdots$,则 $z_1=7$, $z_2=3$, $z_3=02$, $z_4=8$, $z_5=007$, \cdots . 如果把 E_z 的 $0.z_1z_2z_3$ 点与 E_z 的

$$(0,z_1z_3z_5\cdots,0,z_2z_4z_5\cdots)$$

点相联系,并把 E_i 的

$$(0, x_1x_2x_3\cdots, 0, y_1y_2y_3\cdots)$$

点与 E_1 的 $0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3$ …点相联系,则可证明在 E_1 与 E_2 的点之间能建立一一对应.于是也就证明了:单位正方形上所有点的集合有超限数c.(这证明:流形的维数不能由流形的超限数来区别。)

- 34.5 (a) 证明:如果一个圆的圆心至少有一个无理坐标,则该圆至多有两个点有有理坐标.
- (b) 证明:如果一个圆的圆心至少有一个超越坐标,则该圆至多有两个点有代数数坐标:
- (c) 在笛卡儿平面上是否可能有一条直线或一个圆只包括有有理坐标的点? 只包括有代数数坐标的点?
- (d) 证明: 在一条直线上互不相交的闭区间的任何无限集合 是可数的.
- (e) 证明: 在一平面上互不相交的圆的任何无限集合是可数的.
- 34.6 (a) 证明:每一个有理数都是代数数,因而,每一个实超越数都是无理数.
 - (b) 每一个无理数是不是都是超越数?
 - (c) 虚单位i是代数数, 还是超越数?
 - (d) 证明: π/2是超越数.
 - (e) 证明: π+1是超越数.

- (f) 把(d)和(e)推广.
- (g) 证明: 任何复数如果是形为

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

(在这里, a_n =0,并且,所有的 a_k 是有理数)的多项式的零点,则它是代数数.

- 34.7 证明:加法和乘法的消去律对于超越数不成立.
- 34.8 证明: 非负整数的所有有限序列的集合是可数的.
- 34.9 令 S 表示当自变量 x 取正整数值时函数也取正整 数值的一个变量 x 的所有单值函数的集合,证明: S 是不可数的.

参考文献

BELL, E. T., Men of Mathematics. New York: Simon and Schuster, 1937.

BOLZANO, BERNHARD, Paradoxes of the Infinite, tr. by F. Prihonsky. London: Routledge and Kegan Paul, 1950.

BREUER, JOSEPH. Introduction to the Theory of Sets, tr. by H. F. Fehr. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1958.

CANTOR, GEORG, Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers, tr. by P. E. B. Jourdain. New York: Dover 1915.

GALILEO GALILEI, Dialogue Concerning Two New Sciences, tr. by H. Crew and A. de Salvio. New York: Dover, 1951.

JOHNSON, P. E. A History of Set Theory. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1972.

KAMKE, E., Theory of Sets, tr. by F. Bagemihl. New York: Dover, 1950.

ROTMAN, B., and G. T. KNEEBONE, The Theory of Sets and Transfinite Numbers. London: Oldbourne, 1966.

第 35 讲

一些重要的定义

虽然古代希腊人对数学的内容做出许多贡献,但也许他们对 此学科的最卓越的贡献还是他们用公理化方法 对 数 学 所作的整 理.公理化方法的最早形式已经成为人们熟知的实质公理学,我 们在第7讲中对其模式作了描述.在第8讲中,我们讲述了欧几 里得的《原本》(Elements),它是留传下来的实质公理学的最早的 也是最伟大的应用.

希腊人的公理学概念经历了普遍的忽视之后,一直持续到十九世纪,这时,数学发展中的三个重大事件导致数学家们对公理化方法作深一步的研究。三个事件中的前两个是: 1829年左右,非欧几何的发现,和过后不久,非交换代数的发现. 这两个发现向古希腊的把公理当作自明的或者至少是易于接受的真理的思想提出质疑. 第三个事件是以分析的算术化为其顶峰的长时期的深入探讨. 在为实数系和自然数系构造适当的公设基础方面,整个公理化方法受到很严格的审查.

由于十九世纪许多数学家的工作,公理化方法逐渐变得清晰和精细,希尔伯特的《几何基础》对欧几里得几何公设作了通俗而又严格的发展,发表于1899年;在公理化方法的此次重建中,它是最有影响的著作,从希腊人的实质公理学,向二十世纪初的所谓形式公理学转变.

为了弄清楚两种形式的公理学的区别,让我们引进命题函数这个现代概念。最先注意到这个概念的重要性的是英国数学家和哲学家B.罗素(Russell,1872—1970).

考虑三个陈述:

- (1) 春天是季.
- (2) 8是素数.

这三个陈述的每一个有形式——同样的形式,每一个都断言: "某事物"是"某别的事物". 陈述(1)和(2)既有内容,又有形式,陈述(3)只有形式. 知道"春天"和"季"这两个具体的项何所指,我们宣称陈述(1)是真陈述,知道"8"和"素数"这两个具体的项何所指,我们宣称陈述(2)是假陈述。由此得出:陈述(1)和(2)是命题,因为,根据定义,命题是任何这样的陈述,说它具有真或假的性质是有意义的. 另一方面,命题(3),因为它没断言什么确定的事,既非真的也非假的,所以,它不是命题. 然而,陈述(3)虽然不是命题,有命题的形式. 它被称做命题函数,因为如果我们在形式

x是y

中以有确定意义的项代替变元x和y,我们就得到命题:如果代人的项证实此命题函数,则是真命题,如果代人的项证伪此命题函数,则是假命题.上面考虑的形式是两个变元的命题函数;关于这两个变元,有无穷多证实的值.

命题函数可包括任何多个变元.x是议会图书馆的一本书: 就是只有一个变元的例子。在这里,显然,议会图书馆有多少书, x就有多少证实的值.显然,变元x也有许多证伪的值.

命题函数中的变元没有必要用象x, y, …这样的符号表示; 它们可以是日常用的词.于是,在论文中出现以日常用语作为项 的陈述,其用词应该被理解为不确有所指;因此在论文中,此陈 述确实是个命题函数而不是命题.为了清楚起见,最好还是用x, y,…这样的符号取代模糊的、不确定的项.写的和说的论文常包 括这样的陈述,虽然它们的作者断言它们是真命题或假命题,其 实,是完全没有真的性质或假的性质的命题函数.人们的许多争 论和误解也许正来源于此.

先把命题函数的思想牢记心中,让我们回过头米讨论公理化过程,我们回想一下第7讲说的,任何合乎逻辑的论文,为了达到

清楚明白,总要对该论文的元素、这些元素间的关系和施加于它们之上的运算给予明确的定义.这些定义又要用到其它的元素、关系和运算,而它们又要加以明确的定义.如果要对它们定义,势必又涉及更深一层的元素、关系和运算.对我们来说只有两条路:或者,定义之链必须切断于某点,或者,它必须是循环的。因为在合乎逻辑的论文中搞定义循环是不允许的,这一连串的定义必须封闭于某一点.这么一来,必然有一个或多个元素、关系,和/或运算没有明确的定义而被接受.它们就是人们熟知的论文的原始项.

在一篇合乎逻辑的论文中,总还要努力推导该论文的陈述。 这样的推导,无论如何,是从其它陈述出发的。而这些其它陈述 又必须从某些其它陈述推出。再则,为了找到起点并为了避免循 环,总有一个或者多个陈述是完全不证明的。它们就是人们熟知 的该论文的公设(或公理,或原始陈述)。

于是,显然,任何一篇我们所考虑的这种论文必须依照下列 模式.

形式公理学的模式

- (A)该论文包括一组专门项(元素,元素间的关系,施加于元素的运算),它们作为不加定义的项被慎重地选择,它们是该论文的原始项。
- (B)该论文包括一组关于原始项的陈述,它们是作为不加证明的陈述被慎重选择的,称为该论文的公设(或公理) P. (A) 和(B) 合起来,被称做该论文的基础.
 - (C)该论文的所有其它专门项,用前面引进的项定义.
- (D)该论文的所有其它陈述以前面承认的或证明的陈述合乎 逻辑地推导出来,这些导出的陈述被称做该论文的定理T.
- (E)对于该论文的每一个定理T,,存在一个对应的陈述(它可以或不可以被形式地表述),断言:定理T,逻辑地蕴涵于公设P中.(对应的陈述常以"因此此定理成立"或"这完成此定理的证明"这类话出现于该定理的证明的末尾.在某些初等几何课本中,

此陈述以"Q.E.D."(Quod Erat Demonstrandum)(证完)字样写在该定理的证明的末尾。P.R.哈尔莫斯(Halmos)提出的现代符号■,或其某种变异,常被用作证明结束的符号.

对上述模式中要注意的第一件事是:作为不加定义的原始项, 也可以由象x, y, …这样的符号代替(如果不是已经用过这样的符号的话). 我们假定作了这样的替代.于是,原始项明显是变元. 第二件要注意的事是:公设P,因为它们是关于原始项的陈述, 只不过是命题函数,因而没有所有真或假的内容.第三件要注意的事是:定理 T,因为它们只不过是公设P的逻辑蕴涵,也是命题函数,并且,因此没有所有真或假的内容.

因为一篇合乎逻辑的论文的公设和定理只不过是命题函数,即,只是形式的陈述并没有内容,似乎整个论文有点空,并且完全无所谓真或假.但不是这么回事,因为根据公设奠式(E),我们有最重要的陈述.

(F)公设P蕴涵定理T.

现在(F)断言某确定的事物,它或是真的或是假的,并且,因而是命题,如果定理T事实上由公设P蕴涵,它是真命题,如果不由公设P蕴涵,则是假命题.陈述(F)恰恰就是该论文想做的事,它是该论文的唯一的目的,也是它存在的理由.

我们现在来讲一些重要的定义.根据上述模式作的论文,已被一些数学家称为纯数学的一个分支,而纯数学的所有这样的现存的分支的全体被称做到目前为止的纯数学.

如果,对于纯数学的一个分支的变元(原始项),我们用使该分支的所有公设成为真命题的有确定意义的项代替,则取代它们的项的集合被称做该纯数学分支的一个解释.只要所有的推理是正确的,这个解释也将使该论文的定理成为真命题.以解释代入纯数学分支的结果被称做该纯数学分支的一个模型.

纯数学分支的一个模型称做应用数学的一个分支, 并且, 所

有现存应用数学分支的全体,被称做到目前为止的应用数学.这么一来,应用数学和纯数学之间的差别就不是可应用性和不可应用性的差别,而是具体与抽象的差别.在每一个应用数学分支后面,有一个纯数学分支,后者是以具体发展为前提的抽象发展.易于理解(事实上,也常如此):一个纯数学分支可以有几个模型,或与之相联系的几个应用数学分支.这是纯数学的"经济"特征,因为建立了一个纯数学分支,也就自动地保证同时建立所有与它相联系的应用数学分支.

某些纯数学分支的抽象发展是形式公理学的一个实例,就象一个已知的应用数学分支的具体发展是实质公理学的一个实例一样,在前一场合,我们把公设考虑为先于原始项的任何说明,在后一场合,我们把解释原始项的对象考虑为先于公设的.在前一场合,公设简直是关于某些不加定义的原始项的基本假定,在后一场合,公设表示基本对象的某些性质,这些性质是显而易见并一开始就被接受的.后者是公设的旧观点,是古希腊人所持有的观点,例如,对于古代希腊人来说,几何被看作是对物理空间的唯一结构的研究,在物理空间中,元素点和线被看作是某现实的物理实体的理想化,而公设是关于这些理想化的易接受的陈述.从现代的观点看,几何是没有物理意义或形象的纯抽象研究.

纯数学的观念使罗素的似乎是开玩笑的评论具有值得重视的意义;罗素说:"数学可被定义为这样一门科学,关于它我们永远不知道我们说的是什么,也不知道我们说的是不是真的".按照H.庞加莱(Poincar'e, 1854—1912)的意见,数学是"给不同的事物以同样的名称",B.皮尔斯(Ple'rce,1809—1880)则说:"数学是引出必然结论的科学".

虽然我们还能摘引许多其他著名数学家提出的同上面说法很相似的一些确定的陈述,但并不是所有的数学家都同意上述的(纯)数学的定义.有许多数学家,搞他们心目中的数学,从来不搞什么公设;尽管如此,他们常由某已知的或假定的前提推演结

论,这还不是一回事吗!除了初等几何外,实际上没有别的中学低班或大学低班的数学课是由公理化方法推演的,这些数学课也可由公理化方法推演,不过,在低年级这么讲对学生来说也许太艰深了,所以,从教学法的观点看并不可取. 再则,必须承认:在低年级讲的并没有多少数学,只不过是计算技巧。不管怎样,形式公理学的进展构成数学史上一个卓越的里程碑;例如,给(纯)数学下的、上面说的那个定义。事实上,罗素把确切地认识到数学是什么当作二十世纪数学家的一个很高水平的、很重要的成就。

在即将结束本讲的时候, 我们用一两句话讲讲在数学中如何 引出公设集的,大多数公设集来源于某抽象体系的模型,也就是 说,在大多数场合,个别的研究者在脑子里有了某特定的模型, 然后去建造将重现其模型的公设体系。因此,实际上,模型或解 释一般在先而公设在后,在生物学,化学,经济学。伦理学,法 学,力学,哲学,物理学,动物学等领域中,尤其如此;在这些人 们熟悉的领域中,我们能为该领域(或该领域的某部分)选定某些 公设, 然后看看能从这些公设逻辑地推导出什么定理, 理论上, 当然没有必要在进行抽象的推演之前, 先有模型, 但还得承认, 模型是公设集的通常来源,如果我们为原始项写下某些随意的符 号,然后试图表述关于这些原始项的公设,在脑子里没有什么模 型而要想说点什么就很困难,何况我们还必须十分认真地保证公 设的相容性,有时,一个新公设体系,通过改变已知体系的一个 或多个公设的办法,从已知公设体系导出,罗巴切夫斯基和黎曼 的非欧几何的公设集就是以这种方法从欧几里得几何的公设集导 出的,还能给出其它例子,

习 颞

35.1 (a) 构造包括三个变元的命题函数的例子.

- (b) 以适当的替代从此命题函数得出三个真命题,
- (c) 以适当的替代从此命题函数得出三个假命题:
- 35.2 借助于命题和命题函数的概念,讨论"上帝是爱"这个 陈述。
- 35.3 在初等数学中,比如说,一个变量 x 的方程,可被看作是只允许 x 为复数的命题函数.初等数学的基本问题是确定那些复数(如果存在的话),这些复数使方程成为真命题.对于下列每个方程,x的证实值是什么?
 - (a) 3150+15x=3456-33/2x.
 - (b) $\sin x = \cos x$.
 - (c) $2x^2-5x-3=0$.
 - (d) $x^2 = 3 x$.
 - (e) $x^2 + 3x + 6 = 0$.
 - (f) $2x/(x^2-9)+2/(x+3)=1/(x-3)$.
 - (g) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2-4} = 0$.
- 35.4 形式公理学(连同其抽象和符号)的一个目的是反对使用直觉,先凭直觉答复下列问题,然后靠计算核对你的答案,
- (a) 一辆汽车以每小时40公里的速度从P向Q行驶,然后,以每小时60公里的速度从Q向P返回。问这样一个往返路程的平均速度是多少?
- (b) 甲做某工作用 4 天, 乙做它用 6 天, 甲乙二人一块做该工作要用多少天?
- (c) 一个人把其一半的苹果以每 3 个17分的价格卖出,另一 半以每 5 个17分的价格卖出。问他应以什么价格卖他的全部苹果 才能得到同样的收入?
- (d) 直径为 4 英寸(1英寸=2.54厘米)的一团毛线值20分,问直径为 6 英寸的一团毛线值多少钱?
- (e) 两件工作有同样的起始薪金:每年6000元,和同样的最高薪金:每年12000元,一件工作每年增加800元,另一件工作每

半年增加200元。问哪一件工作的薪金高?

- (f) 在某培养液中每一个细菌一分钟分为两个细菌,如果在一小时末有2000万个细菌出现,问在什么时候正好出现1000万个细菌?
- (g) 第一个半月给1分钱薪金,第二个半月给2分钱薪金,第三个半月给4分钱薪金,第四个半月给8分钱薪金,等等,直到该年年底,问这样的年工资是高还是低?
 - (h) 一座钟在 5 秒钟内打六下, 问它多长时间打十二下?
- (i) 一个瓶子和一个软木塞总共价格为1.10元,如果瓶子比 软木塞的价格高 1 元,问软木塞的价格是多少?
- (i) 假定在一个玻璃杯中有一定量的液体 A, 在第二个玻璃杯中有同样数量的液体 B. 从第一个玻璃杯中取一汤匙液体 A放入第二个玻璃杯,然后从第二个玻璃杯中取一汤匙混合液体放回第一个玻璃杯。问: 第二个玻璃杯中的液体 A 和第一个玻璃杯中的液体 B, 哪个多?
- (k) 假定千分之一英寸厚的一张大纸被撕成两半,把两张放到一起,一张在另一张上面. 再把每一张撕成两半,把四张攥在一起. 如果把撕成两半,摞在一起的程序做五十次,问最后的堆是高于一英里还是低于一英里?
- (1) 对一件物品的卖价打15%的折扣,和对该物品的卖价先打10%的折扣再对减价后的价钱打5%的折扣,是否一样?
 - (m) 四分之四比四分之三超过什么分数部分?
- (n) 一个小孩要计算他八门课分数的算术平均,他先平均前四门课的分数,然后平均后四门课的分数,最后求这两个平均的平均,问这么算是否正确?
- 35.5 虽然依形式公理学作的论文的原始项不采取显定义, 试讨论,如何把它们说成是采取隐定义,
- 35.6 在下列的每一小题中,从给定的一对前提引出给定的结论,是否是有效的推理?

(a) 如果今天是星期六,则明天将是星期日,

但是, 明天将是星期日.

所以, 今天是星期六,

(b) 德国人是能喝酒的人,

德国人是欧洲人,

所以,欧洲人是能喝酒的人,

(c) 如果a是b, 则o是d.

但是, c是d.

所以, a是b.

(d) 凡a的皆b的,

凡a的皆c的.

所以,凡c的皆b的。

这些习题例证地说明:一个人怎么让与词或表达式有联系的意义去支配其逻辑分析,把(a)和(b)弄错,比把(c)和(d)弄错的倾向为大,(c)和(d)实际上是(a)和(b)的符号的相似物。

参考文献

BLANOHÉ, ROBERT, Axiomatics, tr. by G. B. Keene. London: Routledge and Kegan Paul, 1962.

MEYER, BURNETT, An Introduction to Axiomatic Systems. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1974.

WILDER, R. L., Introduction to the Foundations of Mathematics, 2nd ed. New York: John Wiley, 1965.

第 36 讲

一些阐述清楚的例子

在本讲中我们将以例子说明前讲中遇到的有趣的定义. 简短

地说,我们要给出纯数学分支的一个简单例子,然后再给出它的三个应用,也就是说,我们将根据形式公理学推演一篇短论文,然后,给该论文的原始项以适当的解释,得到该论文的三个模型.我们先解释所采用的一些记号.

每个人都熟悉作为一对对象之间的一种联系方式的二元关系的概念,因为它不是一个数学所特有的概念,而已是人们日常生活和交往中的概念。我们常常能听到象"是…的父亲","同…结婚","在…的左边","比…高","比…重","与…同样颜色",等等之类的二元关系。初等几何对"与…相似","与…相等","与…平行"和"与…垂直"这些二元关系感兴趣。初等算术与"等于","不小子"和"大于"这些二元关系有关。这些关系短语或它们的符号常被安放于有这种关系的对象之间。比如,"a是b的父亲"和"a比b高",在这里,a和b是人,"a~b"和"a运b" 在这里,a和b是三角形;"a/b"和"a」b",在这里,a和b是直线;"a=b"和"a本b",在这里,a和b是实数。相应地,如果集合 K的两个元素a和b是依某二元关系R相关的,我们就写"aRb"并读作"a与bR相关"。如果a与b不R相关,我们就写"aRb"并读作"a与bR相关"。如果a与b不R相关,我们就写"aRb"并读作"a与bR相关"。如果a与b不R相关,我们就写"aRb"并读作"a与bR相关"。如果a与b不R相关,我们就写"aRb"并读作"a与bR相关"。如果a与b不R相关,我们就写"aRb"并读

在本书中,我们将在恒等的意义上使用等号。例如,"a=b" 意指:a和b是同一元素。如果a和b是不同的元素,我们将写"a=b"。

现在让我们依形式公理学作一篇论文:

一个纯数学分支的简单例子

基础 不加定义的元素a, b, c… 的集合K, 和联系K的某对元素的、不加定义的二元关系R, 它满足下列四条公设。

- P1 如果 $a \neq b$,则或者aRb,或者bRa.
- P2 如果aRb,则 $a \neq b$.
- P3 如果aRb, 并且bRc, 则aRc.

P4 K包括正好四个不同的元素.

现在我们来从上述公设推导某些进一步的陈述或(定理). 这些定理,分别标以T₁,T₂,…,任何程式化的定义,以D₁,D₂…表示.

T1 如果aRb, 则 $b\overline{R}a$.

假定既aRb,又bRa.则,根据P3,aRa.但是,根据P2,这是不可能的。因此,用归谬法,此定理得证。

T2 如果aRb, 并且eaK中, 则或者aRc, 或者cRb.

如果c=a,则cRb,这样, 我们就达到了所要的结论 · 如果 $c\neq a$,根据P1,我们有,或者aRc,或者 cRa · 如果 cRa,因为还有aRb,根据P3,我们有cRb · 于是,此定理得证 ·

T3 至少有K的一个元素不与K的任何元素 R相关.

假定相反的情况,并且令a为K的任何元素,则根据我们的假定,存在K的一个元素b,使得aRb,根据P2,a和b是K的不同的元素。

根据我们的假定,存在K的一个元素 c, 使得bRc. 根据P2, $b\neq c$. 根据P3,我们还有aRc. 根据P2, $a\neq c$. 因此 a, b, c是 K的不同的元素.

根据我们的假定,存在K的一个元素d,使得cRd. 根据P2, $c \neq d$. 根据P3,我们还有bRd和aRd. 根据P2, $b \neq d$, $a \neq d$. 因此a, b, c, d是K的不同的元素.

根据我们的假定,存在K的一个元素e, 使得dRe. 根据P2, $d\neq e$. 根据P3, 我们还有cRe, bRe. aRe. 根据P2, $c\neq e$, $b\neq e$, $a\neq e$. 因此, a, b, c, d, e是K的不同的元素.

现在我们得到与 P4 矛盾 的结果. 于是,此定理用归谬法得证.

T4 只有K的一个元素不与K的任何元素R相关。

根据T3,至少有这样一个元素,比如说 $a.\diamondsuit b + a 为 K$ 的任何其它元素。根据P1,或者aRb,或者bRa.但是,根据假定,我们没有aRb.所以,我们必定有bRa,并且,此定理得证。

D1 如果 bRa, 则我们说aDb.

T5 如果 aDb, 并且bDc, 则aDc.

根据D1, bRa并且cRb. 根据P3, 则我们有 cRa, 或,根据D1, aDc.

D2 如果 aRb, 并且没有K 的元素c, 使得 aRc和cRb, 则我们说aFb.

T6 如果 aFc, 并且 bFc, 则a=b.

假定 $a \neq b$. 则,根据P1,或者aRb,或者bRa.

第一种情况、假定aRb、因为bFc,根据D2,bRc、但是,这是不可能的,因为aFc.

第二种情况、假定bRa. 因为aFc, 根据D2, aRc. 但是, 这是不可能的, 因为bFc.

于是,在任何情况下,导致与我们的假定矛盾,此定理用归 谬法得证:

T7 如果 aFb, 并且 bFc, 则aFc.

根据D2, aRb和bRc. 因此, 再根据D2, aFc.

D3 如果 aFb并且 bFc, 则我们说aGc.

我们将我们的抽象公设的论文在此点切断,当然,还有许多 其它定理能在此体系中被证明,不过我们为了例示地说明一个纯 数学分支的观念,也许已经讲得够多了,

在我们继续把前讲中遇到的进一步的定义阐述清楚之前,让我们停下来作一些关于此纯数学分支的附注。要注意:最初的那个定理T1的证明,是靠归谬法完成的。其它一些证明也是用的类似的方法,间接证明法在公理化方法发展的早期常用.这是因为。在演绎处理中,最初只有很少几条陈述能直接利用。定理T3是存在性证明的一个例子。存在性证明是许多数学中都有的,它既普通又重要、定理T4是唯一性证明的一个例于,这样的证明也是许多数学中都有的,它既普通又重要。有时用分几钟情况的办法来证明一条定理;定理T6的证明就是一例。

如果对于集合 K 的每一对不同的元素 a 和 b, 我们有:或者 aRb,或者bRa(对于二元关系R),我们就说,R在K中是确定的.如果对于K的每一个元素a,有aRa,我们就说R在K 中是自反的,如果对于K的每一个元素a,有aRa,我们就说R在K 中是不自反的.如果aRb蕴涵bRa,我们就说R在K中是对称的;如果aRb蕴涵bRa,我们就说R在K中是对称的;如果aRb蕴涵bRa,我们就说R在K中是非对称的.如果aRb和bRa。蕴涵 aRc,我们就说R在K中是传递的,如果aRb和bRa。蕴涵aRa,我们就说R在K中是传递的,如果aRb和bRa。蕴涵aRa,我们就说R在K中是不传递的.有了关于二元关系的这些观念,我们这个纯数学分支的许多公设和定理就能由更加简洁的陈述给出了.这是值得我们注意的.例如,P1,P2,P3,T1,T5和T7可被重述如下:

- PI R 在 K中是确定的.
- P2 R 在 K中是不自反的.
- P3 R在 K中是传递的.
- T1 R 在 K中是不对称的.
- T5 D在K中是传递的,
- T7 F在 K中是不传递的,

现在我们进而给出我们这个纯数学分支的三种解释,于是得到三个模型或三个导出的应用数学分支,

应用1 (家谱的)

令K的元素为四个人——某人,他的父亲,他的父亲的父亲,和他的父亲的父亲的父亲,并且,令R意指"是…的祖先".

我们已经看到: K的元素的解释和关系R的解释把公设转变成 真命题.于是,我们得到了一个我们的抽象公设的论文的具体模型.也就是说,由我们的纯数学分支导出一个应用数学分支.现 在定理都成了真命题而定义则读作:

- T1(1) 如果a是b的祖先,则b不是a的祖先,
- T2(2) 如果a是b的祖先,并且, 如果 c 是四个人之一,则或者a是c的祖先,或者c是b的祖先。
 - T3(1) 在K中至少有一个人,他不是K中任何人的祖先.

- T4(1) 在K中只有一个人,他不是K中任何人的祖先,
- D1(1) 如果b是a的祖先,我们说 a是b的子孙.
- T5(1) 如果a是b的子孙,并且b是c的子孙,则a是c的子孙.
- D2(1) 如果a是b的祖先,并且没有K的个体c,使得a是c的祖 先并且c是b的祖先,我们就说a是b的父亲。
 - T6(1) 一个人至多有一个父亲,
 - T7(1) 如果a是b的父亲,并且b是c的父亲,则a不是c的父亲.
- D3(1) 如果a是b的父亲,并且b是c的父亲,我们就说,a是c的祖父。

在我们的纯数学分支中用的记号D, F和G说明, 纯数学分支 是由应用数学分支的抽象而得到, 许多纯数学分支就是作为该分 支的某具体模型的抽象产生的,

应用2(几何的)

令K的元素为一条水平直线上的四个不同的点,并且令R意指"在…的左边"。

我们的公设也都被满足.这样我们从我们的纯数学分支又导出了第二个应用数学分支.关系D意指"在…的右边",关系F意指"K的在…左边的第一个点",而关系G意指"K的在…左边的第二个点".

应用3(算术的)

令K的元素为1,2,3,4四个整数,并且令R意指"小于".

我们的公设又都被满足.这样我们从我们的纯数学分支又导出了第三个应用数学分支.在这里,关系D意指"大于",关系F意指"比…小1",关系G意指"比…小2".

我们用一个纯数学分支及其导出的应用数学分支的例子说明现代公理化方法的"经济"特征, 纯数学分支的任一定理, 在每一个应用中生成对应的定理, 而后者用不着证明, 只要抽象体系中的定理已被证明, 上面 研 究 的 抽象公设集是四个元素的简单序(simple order)公设集, 作为前三条公设的解释的任何一种关系,

被称做简单序关系."小于","大于","在…左边","在…右边", "在…前面","在…后面",全是简单序关系.

习 题

- 36.1 试证明本讲正文中发展的纯数学分支的下列定理: 如果 aGe并且 bGe,则a=b.
- 36.2 (a)在本讲正文中发展的简单的纯数学分支中,定义三元关系B(abc),意指(aRb和bRc)或(cRb 和 bRa). 现在证明:如果B(abc) 成立,则B(acb) 不成立.
- (b) 在本讲正文中给出的纯数学分支的三个应用中, B(abc)的意义是什么?
- 36.3 写出本讲正文的纯数学分支的几何上的应用的定理和 定义的陈述。
- 36.4 写出本讲正文的纯数学分支的算术上的应用的定理和 定义的陈述.
- 36.5 在本讲的纯数学分支中,令K为不同半径的四个同心 圆的集合,并且令R意指"包含于". 试说明. 这些意义生成公设集的解释,并且写出所得模型的定理和定义的陈述.
- 36.6 一个二元关系,它在集合 K 中是自反的、对称的和传递的,被称做 K 中的等价关系。证明下列二元关系是等价关系。应用于人的集合有"与···是同时代的"和"与···同年",应用于自然数的集合有"等于"和"与···相同的奇偶性",应用于一个平面上的所有三角形的集合,有"相似于"和"全等于"。
- 36.7 下列论证证明:一种关系,它既是对称的又是传递的,必定是自反的;错在哪里?

根据对称性,aRb蕴涵bRa,再根据传递性,aRb和bRa蕴涵aRa.

390

36.8 令S为所有有序正整数对的集合, 并且定义: (a, b)=

(c,d),当且仅当a+d=b+c.证明:此相等的定义是S中的等价关系。

36.9 令S为所有有序整数对的集合,并且定义:(a,b)=(c,d), 当且仅当ad=bc. 证明: 此相等的定义是S 中的等价关系.

36.10 令 S 为所有非负整数的集合,并且考虑二元关 系: "a和b在被 4 除时有相同的余数".证明此二元关系是 S 中的等价关系.

第 37 讲

第三个层次

在建造一个纯数学分支时,人们可能这么想:我们能为论文的原始项安排随意一组符号,然后,对于这些原始项列出随意一组陈述作为论文的公设.其实,远不是这么回事.有一些要求的和期望的性质是公设体系应该具有的.本讲将对公设集的某些性质作简短的考察.

在公理研究中,有三个不同的层次。第一个层次是:专门知识领域的具体的公理化发展——这些发展是实质公理学的例子。第二个层次是:以上述专门领域作为模型的抽象的公理化发展——这些发展是形式公理学的例子。第三个层次是:对形式的抽象公设体系所具有的性质进行研究的理论。希尔伯特首先给这第三个层次,也即三个层次中最高的层次命名为元数学 (metamath matico).这三个层次(实质公理学.形式公理学、元数学)的每一个的出现都构成数学史上的里程碑。前两个层次已经讲过了,现在该讲第三个层次了。虽然,我们将看到,这第三个层次在十九世纪上半叶发明非欧几何和非交换代数时就开始了,但是,直到1899年希尔伯特发表《几何基础》前它没有受到重视,直到1920年左右,它才成为人们的一个研究领域。

在公设体系的许多性质中,我们将只讲人们熟知的四个性质:

等价性、相容性、独立性和范畴性,第一个性质是就一对公设体系而言的,其余三个性质则是就单个公设体系而言的,

等价性

P^①和P^②两个公设体系被说成是等价的,如果每一个体系蕴涵另一个,即:如果在每一个体系中的原始项能由另一个体系的原始项定义,并且,如果每一个体系的公设均可由另一个体系的公设导出.如果两个公设体系是等价的,则它们蕴涵的两个抽象研究当然是一样的,实质上只不过是"以不同方式说同一件事".等价公设体系的思想起源于古代,对欧几里得的平行公设不满意的几何学者们,早就试图以一个较为易于接受的等价物取代它.对欧几里得几何的现代研究,连同它们的各种各样的、十分不同的公设基(postulational bases),清楚地表明:公设体系绝不由所讨论的课题唯一地确定,它还与选什么专门项作为不加定义的项和选什么陈述作为不加证明的陈述有关.

要确定两个等价的公设体系哪一个好,也许没有简单的标准;看来多半依个人爱好而定.考虑到假定的经济性,可能认为:包括较少原始项和较少公设的体系是被人喜爱的体系.另一方面,从教学法的观点看,可能更喜爱能较快导出重要定理的体系.

当一个公设体系等价于前讲中所说的纯数学分支的公设体系时,我们可以用同样的原始项连同P1,T1,P3和P4作为公设。因为T1已被从P1,P2,P3,P4导出,并且,易于证明,P2能从P1,T1,P3,P4导出,共证明如下:

P2 如果 aRb, 则 $a \neq b$.

假定,相反,我们有aRb,并且a=b.则我们还有bRa.根据 T1,这是不可能的、于是,用归谬法,P2得证.

相容性

一个公设集被说成是相容的,如果彼此矛盾的陈述不同时被该公设集蕴涵.这是公设集的最重要、最基本的性质,没有这个性质,公设集就根本没有价值.这是因为:如果某陈述 A和与之

矛盾的陈述非A都能被证明,则任何陈述B能被证明。

已发现的、用来证明一个公设集的相容性的最成功的方法是模型法.一个公设体系的模型是这么得到的:为该公设体系的原始项规定意义,从而把公设转变成关于某概念的真命题.有两种类型的模型——具体的模型和理想的模型.一个模型被说成是具体的,如果给原始项规定的意义是从现实世界选来的对象和关系;一个模型被说成是理想的,如果给原始项规定的意义是从其它公设体系选来的对象和关系.

在一个具体的模型已被展示之处,我们认为:我们已经证明了我们的公设集的绝对相容性,因为如果公设蕴涵矛盾的陈述,则对应的矛盾的陈述会在我们的具体的模型中出现,但是在现实世界中是不可能有这样的矛盾的.

为给定的公设体系安排具体模型,并不总是行得通的. 例如,如果该公设集包括无穷多个原始元素,具体模型就肯定是不可能的,因为,看来,现实世界不包括无穷多个对象. 在这类场合,我们就建立理想模型. 例如用其它公设体系B的概念来定义公设体系A的原始项,此时体系A的公设的解释是体系B的公设的逻辑推论. 但是,现在我们不能再把公设集A的相容性检验宣称是绝对的检验,而只是相对的检验了. 我们所有能说的话只是: 如果公设集B是相容的,则公设集A也是相容的. 实际上我们把体系A的相容性归结为另一个体系B的相容性.

当我们将模型法应用于许多数学分支时,相对相容性是我们最高的指望,因为,许多数学分支包括无穷多个原始元素。例如,罗巴切夫斯基平面几何,就是这种情况。但可以在欧几里得平面几何内建立一个罗巴切夫斯基平面几何的模型,用以证明:如果欧几里得平面几何是相容的,则罗巴切夫斯基平面几何也是相容的。

前讲中的那个简单纯数学分支的家谱模型,因为它是现实世界中的一个模型,就证明那个纯数学分支的公设集是绝对相容的,

但我们应该以

P'4 K包括可数无穷多个不同的元素,

代替P4. 要证明这个修正的公设集的绝对相容性,我们可没这个能力了. 但我们能将K的元素解释为自然数1,2,3,…,令关系R 意指"小于",并以此来证明修正的公设集的相对相容性. 我们已经得到自然数算术内的一个模型,因此,修正的体系是相容的,如果自然数算术是相容的话.

独立性

一个公设集的一个公设被说成是独立的,如果它不是该公设集的其它公设的逻辑推论;整个公设集被说成是独立的,如果其每一个公设是独立的。

在数学史中关于一个公设的独立性的最著名的研究是与欧几里得平行公设的研究相联系的。多少个世纪以来,数学家们曾致力于证明平行公设独立于欧几里得的其它公设(和公理),而没有成功,因而,又不断地试图证明它是其它这些假定的推论。最后证明欧几里得平行公设的独立性的是罗巴切夫斯基非欧几何的发现及其相对相容性的证明。因此可以毫不夸大地说,历史上欧几里得平行公设的独立性的研究为整个公设集性质研究开辟了道路。

对给定公设集中的一条公设的独立性的检验在于:为该公设集的原始项找一种解释,它证伪所考虑的公设和证实其余每一条公设.如果我们成功地找到这样一种解释,则所考虑的公设不能是其余公设的逻辑推论,因为,如果它是其余公设的逻辑推论,则能使所有其它公设成为真命题的解释必定也能使它成为真命题的解释必定也能使它成为真命题.顺着这些路子来检验某一个完整的公设集的独立性,显然是很费劲的事,因为如果在该公设集中有n条公设,就必须做n次分别的检验(对每一条公设要检验一次).

公设集的独立性绝不是必要的,一个公设集显然不会仅因为 它缺少独立性就成为无用的,一般地说,数学家偏爱独立的公设 集,因为他要把他的理论建立在最少的假定上.不独立的公设集只不过有点累赘,在其中包括一个或多个可由定理代替的公设.然而有时为了教学的方便,从一个不独立的公设集推演一门学科,也有它的好处,例如,从一套公设基础推演中学平面几何.如有一个较早出现的定理可能难证明,这条定理就可以当作一条公设.当学生们已经掌握了必要的数学技巧并且熟悉该学科时,可向他们指明,这条公设实际上不是独立的,并且能从其它公设证明它.

有些著名的公设集在它最初发表时,人们并不知道它包括了不独立的公设. 例如,希尔伯特起初为欧几里得几何安排的公设集就是如此. 后来证明,此公设集中有两条公设被蕴涵于其它公设中. 这两条不独立的公设的发现并没有使希尔伯特体系成为无效的, 在尔后的修正中, 这两条公设只不过变成了定理, 并补上了它们的证明.

类似地, R.L. 怀尔德(Wilder)能证明: R.L. 莫尔(Moore) 的、实质上创立现代点集拓扑学的八条公设组成的著名的公设集, 能取消其第六条缩减为七条. 对于这第六条公设独立性的怀疑, 是由其独立性证明有错引起的, 并且, 尔后寻求满意的证明的努力都成徒劳. 当然, 莫尔的数学理论并没有因为怀尔德的发现而受多大影响; 但是, 把八条公设的体系缩减为同样有效的七条公设的体系.

现在我们来证明前讲中的简单的纯数学分支的公设集是一个 独立的公设集。

为了证明公设P1的独立性,我们把K解释为由两兄弟,他们的父亲,和他们的父亲的父亲组成,并且,把R关系解释为"是…的祖先".此解释证实P2,P3和P4,但证伪P1.

为了证明公设P2的独立性,我们可以把K解释为整数1,2,3,4的集合,R关系解释为"不大于".此解释证实除了P2之外的每一条公设.

为了证明公设P3的独立性,我们把K解释为任何四个不同的

对象的集合, R关系解释为"不等同于". 于是, 除了P3外所有公设被证实.

最后,为了证明公设P4的独立性,我们可以把K解释为1,2,3,4,5五个整数的集合,R关系解释为"小于"。除了P4外所有公设在此解释中被证实。

范畴性

范畴性这种性质比已经讲过的三种性质要难懂些,我们在给它下定义之前先引进公设体系的同构解释的概念,

在公设体系P的原始项中,比如说,我们有表示元素的一组 E,或许有元素之间的某些关系 R_1 , R_2 ,…,并且还有施加于元 素之上的某些运算O1,O2,···. 因此,该公设体系的一种解释至 少部分地由元素常元(对这些E规定意义),或 部分地由关系常元 (对这些R规定意义),或部分地由运算常元(对这些O规定意义)组 成、现在、在P的任何给定的解释I中、令一组 θ 为元素常元(表示 这些E的), r_1 , r_2 ,…为关系常元(表示这些R的) o_1 , o_2 ,…为运 算常元(表示这些O的), 并且, 在P 的任何另一种解释 I'中, 令 元素常元为一组e',关系常元为r', r'_2 ,…,运算常元为 o'_1 , o'_2 , …. 如果在I的元素e和I'的元素e'之间有可能建立一一对应;并 且如果两个或多个元素e由关系r相联系,对应的元素e/由对应的 关系r'相联系; 并且,如果运算。施加于一个或多个元素产生一 个元素e,对应的运算o'施加于对应的元素产生对应的元素 e'; 则我们说,P的解释I和 I' 是同构的,此定义常可简述为:公设 体系P的解释I和I'是同构的,如果我们能在I的元素和 I'的元素 之间建立一一对应,使得"P的关系 和 运 算 被 保 持". 一 个公 设集P的两种同构的解释除了术语和记号的 表 面 差 别 外是等同 的,它们之间的差别不比以英文写和以法文写10×10的乘法表之 闻的差别大.

有了公设体系的同构解释的概念,现在我们可以来定义公设集的范畴性了.公设集P,连同由它推演出的数学分支,被说成

是范畴的,如果P的每两种解释是同构的.

公设集的范畴性通常依靠证明该公设集的任何解释与某给定的解释同构来建立,此程序已被应用于希尔伯特为欧几里得平面几何安排的公设集,已能证明,希尔伯特公设集的任何解释都同构于由笛卡儿解析几何提供的代数解释,罗巴切夫斯基平面几何也已被证明是范畴的体系。

一个体系是范畴的,有其长处也有其短处·一个非范畴公设集的最令人喜爱的特点也许是其应用的广泛——关于该体系不只有一个模型·例如,绝对平面几何的定理——那些欧几里得的和罗巴切夫斯基的平面几何共有的定理——从希尔伯特为欧几里得平面几何安排的公设集中取消平行公设就可以得到·这个缩减的公设集当然是非范畴的,因为欧几里得的和罗巴切夫斯基的解释是不同构的·对于群的任何公设集也能说同样的话,它被非同构的有限的和无限的解释所满足·另一方面,范畴性的长处在于。范畴体系中的一些定理,常可以用证明它们在某一熟悉的模型中的配对物的办法,较容易地证明。例如,在欧几里得平面几何内,就有罗巴切夫斯基平面几何的模型。因为罗巴切夫斯基平面几何 是范畴体系,并且因为我们对欧几里得平面几何比对罗巴切夫斯基平面几何熟悉得多,因此以证明罗巴切夫斯基平面几何在欧几里得模型中的配对物的办法来证明罗巴切夫斯基平面几何中的定理,就有非常现实的可能性。

十分清楚,前讲的简单纯数学分支的公设集是范畴的.但如果我们从该公设集中取消 P4,则剩下的公设集是非范畴的.容易看出,只要把R解释为"小于"并且依次取K包括1,2,3三个整数和1,2,3,4四个整数.这些解释的每一个证实P1,P2和P3,但是这些解释不是同构的,因为在一个解释的三个元素与另一个解释的四个元素之间建立一一对应是不可能的.

数学的这个创造——关于公设体系性质的研究——无疑是数 学史上的里程碑,公设体系除了这些我们讨论过的性质外,还有 许多其它性质.在下一讲中,我们将讲述关于称做完全性的性质的一些事.对此性质的研究,我们将看到,于1931年,导致元数学领域内的值得纪念的数学史上的里程碑,也即,数学史上的里程碑中的里程碑.

- 37.1 如果 p, q, r 代表命题,证明:下列的四个陈述的集合是不相容的: (1)如果 q是真的,则 r是假的. (2)如果 q是假的,则 p是真的. (3) r是真的. (4) p是假的.
- 37.2 令S 为元素的集合,并且,F 为满足下列公设的二元 关系:
 - P1 如果a和b是S的元素,并且,如果bFa,则 $a\overline{F}b$.
- P2 如果a是 S的元素,则至少存在S的一 个元素 b,使得 bFa.
- P3 如果 a 是 S 的元素,则至少存在 S 的一个元素 b,使得 aFb.
 - P4 如果 a, b, c 是S 的元素使得bFa 并且cFb, 则 cFa.
- P5 如果 a 和 b 是 S的元素使得 bFa,则至少存在S 的一个元素c,使得cFa 并且bFc.

证明"如果a是S的元素,则至少存在S的一个不同于a的元素 b,使得b F a 并且,a F b"这个陈述与上述公设相容。

(把上述陈述扩充进去的这个公设集,已被运用于相对论中, 在那里,S的元素被解释为瞬时,而F意指"随后于"*.)

37.3 设K为元素的集合,R为三元关系,考虑下列八个陈述: (1)如果a, b, c是K的元素,则R(abe),R(bea),R(eab),R(bae),R(acb)这六个关系中至少有一个成立. (2)至

^{*} 参看A. A. Robb, A Theory of Time and Space. New York: Cambridge University Press, 1914.

少存在K的三个元素x, y, z使得 R(xyz)成立. (3) R(abc)和 R(acb)这两个关系不能都成立. (4) 如果R(abc)成立,则a,b,c是不同的元素. (5) 如果R(abc)成立,则R(bca)成立. (6) 如果R(xab) 和R(ayb)成立,则R(xay)成立. (7) 如果R(xab) 和R(ayb)成立,则R(xyb)成立. (8) 如果R(abc)成立并且x是K的任何其它元素,则或者R(abx)或者R(xbc)成立. 试证明上述八个陈述是相容的.

37.4 证明习题37.3的下列四个陈述集是彼此等价的: (1), (3), (4), (5), (6), (1), (3), (4), (5), (7), (1), (3), (4), (5), (8), (2), (3), (4), (5), (8). (这四个陈述集的每一个构成循环序(cylic order)公设集.)

37.5 考虑下列公设集,在其中,蜜蜂和蜂群是原始项:

- P1 每一个蜂群是一群蜜蜂,
- P2 任何两个不同的蜂群有一个且仅有一个蜜蜂是共有的.
- P3 每一个蜜蜂属于且仅属于两个蜂群,
- P4 正好有四个蜂群,

证明此公设集是绝对相容的,

- 37.6 证明习题37.2引号内的陈述独立于该习题的公设.
- 37.7 证明习题37.5的公设集的公设P2,P3,P4是独立的.
- 37.8 证明习题37.5的公设集是范畴的.
- 37.9 证明前讲的简单纯数学分支的公设集是范畴的.
- 37.10 二元关系R被说成是元素a,b,c,…的集合K中的等价关系,如果
 - P1 对于K的每一个a, aRa.
 - P2 如果 aRb, 则bRa.
 - P3 如果 aRb并且 bRc, 则aRc.

证明此公设集是独立的,

参考文献

BLÂNCHÉ, ROBERT, Axiomatics, tr. by G. B. Keene. London: Routledge and Kegan Paul, 1962.

EVES, HOWARD, A Survey of Geometry, rev. ed. Boston: Allyn and Bacon, 1972.

MEYER, BURNETT, An Introduction to Axiomatic Systems. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1974.

WILDER, R. L., Introduction to the Foundations of Mathematics, 2nd cd. New York: Wiley. 1965.

第 38 讲

数学, 作为神学的一个分支

1931年,在《数学物理月刊》(Monatshefte für Mathematik und Physik)上发表了一篇题为"论《数学原理》和有关体系的形式不可判定命题"(jber formal unentscheibare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme)的论文。该论文的作者是二十五岁的奥地利数学家和逻辑学家K.哥德尔(Gödel),他当时在维也纳大学。论文发表时,没有受到重视,因为它涉及没有多少研究者的很专的领域,并且其证明方法过于奇特,大多数读者理解不了。只过了几年,该论文就受到专家们的普遍重视,被认为是数学和逻辑的基础方面的真正划时代的贡献。它标志数学史上具有重大意义的里程碑。1938年,论文作者被聘为普林斯顿高等研究所的终生研究员,1952年,被美国第一流大学——哈佛大学——授予(数学家很难得到的)荣誉学位。

哥德尔的论文指出了公理化过程中某些未预料到的局限性, 尤其是,得到了下列成果: (1)它推翻了数学的所有 重 要领域能 被完全公理化这个强烈的信念,(2)它摧毁了沿着希尔伯特曾设想 的路线证明数学的内部相容性的全部希望,(3)它导致了重新评价某些普遍认可的数学哲学,(4)它把一个新的、强有力的、内容丰富的、已经提出并开创了许多新的研究途径的分析技术,引进到了基础研究中,

本讲的主旨在于说明这四点,由于其内容和方法有一些深奥的性质,我们将只进行简短的讨论,而尽量避开该学科的难懂的 术语,

考虑建立欧几里得平面几何公设集的前提工作。我们能 做的第一件事是选原始项,它们要构成该几何的一套专门术语, 使得该几何的所有其它专门术语均能用它们定义, 我们能做的第 二件事是着手列关于原始项的彼此相容的陈述的不断扩大的表。 这些就是我们的公设,这里产生一个问题,我们的这个不断扩大 的表,该在哪里被切断?我们总希望我们的公设集足够富裕,以 能蕴涵欧几里得平而几何任何可能陈述的"真"或"假".换句话说, 我们希望有足够多的公设,使得:如果5是涉及原始项和被定义 项的任何陈述,则,或者S,或者,其矛盾的陈述,非S,被蕴涵 于我们的公设中,如果该公设集不足够富裕,就总会有该几何的 某些陈述不能从我们的公设推出。这种情况是存在的。例如,如 果我们选希尔伯特的那套原始项和希尔伯特的除了平行公设外的 所有公设,这个稍有缩减的公设集使我们永远不能决定; 三角形 的内角和是否总等于180°,因为我们的缩减后的公设集是欧几里 得的和罗巴切夫斯基的这两个公设集的公共部分、显然,我们列 的公设表要达到这样的程度才算足够富裕,想要在我们列的公设 表中再增添任何更多的陈述(它与已列出的公设既独立又相容)是 不可能的,如果达到了这点,我们就有了可称做该几何的完全公 设集.

现在我们可以给出完全性的下列的形式的定义,一个相容的公设集被说成是完全的,如果不扩充原始项,想要在这个公设集上再增加另一个与给定的公设既独立又相容的公设,是不可能的.

继二十世纪早期希尔伯特等人对形式公理学的概念的发展之后,公理化方法有了蓬勃的进展,许多新的和旧的数学分支都建立起公设集,用以处理涉及那些数学分支的原始项和被定义项的任何问题;也就是说,这些数学分支要建立的就是完全公设集,例如,一般认为:皮亚诺公设集对于自然数系是完全的;如果它不是完全的,那它就一定能被添加上一个或多个公设,此信念被哥德尔的论文动摇了,因为,在那篇论文中,哥德尔证明了下列定理:

哥德尔第一定理 对于包含自然数系的任何相容的形式体系 F ,存在F 中的不可判定命题,即,存在F 中的命题 S ,使得 S 和非S 都不是在F 中可证的

由此得出,自然数系的任何公设集,如果是相容的,就是不完全的.换句话说,不管我们能为自然数系采用什么相容的公设集,总存在关于自然数的陈述S,使得S和非S都不能从这些公设证明.这可是惊人的、没有预料到的发现.

数论中有许多著名的猜想,尽管付出了巨大的努力,都未曾被证明或推翻。例如,其中有哥德巴赫猜想(每一个大于2的偶数可被表示为两个素数的和)和所谓费尔马大定理的著名猜想(不存在正整数x, y, z使得x"+y"=z"; 在这里,n是大于2的正整数)。这些猜想中所包含的关于自然数的陈述可能就是在皮亚诺的自然数系中的不可判定的命题。这可能也就是为什么至今没有人能证明或推翻这些猜想的道理。如果对关于自然数的一个给定的陈述,我们至少能确定它是否此体系的可证的命题,那总算是有所得。但是在这里,前途也无望,因为在1936年,美国逻辑学家丘奇(Alonzo Church)证明了下列定理:

丘奇定理 对于包含自然数系的任何相容的形式体系 F,不存在有效的方法。决定F的哪些命题在 F中是可证的。

2. 在前讲中,我们看到:公设集的相容性常靠解释和模型 得到.这样的证明用的是间接法,并且,常常只是把一个数学领 域的相容性问题转变为另一个数学领域的相容性问题.换句话说,用模型法的相容性证明常只是相对的.可以想像,用直接法证明绝对相容性,就是要证明:不会有两个彼此矛盾的定理能从一个给定的公设集根据演绎推理的规则推出.在这过程中,一张允许用的逻辑规则的完全的表,当然是必要的.希尔伯特就曾以这样一种直接的方式着手解决保证经典数学相容性的问题.就如同我们可以依靠游戏规则证明在游戏中不会出现某种情况一样,希尔伯特希望依靠一套从旧定理得到新定理的适当的程序规则来证明在数学的"游戏"中不会出现矛盾的情况.

在这里想要说明相容性证明的直接法,未免太复杂了,但我们还是能依靠同国际象棋的类比来弄清此方法的思想。假定我们想证明:在一局国际比赛中,按下棋规则不管走多少步,总不能达到在棋盘上出现同样颜色的十个女王的情况。在这里,直接的方法是可应用的,因为我们能按下棋的规则证明:没有什么走法能增加同样颜色的女王和小卒的数目的总和。因为此和最初是9,它必定保持≤9.

希尔伯特热心从事共相容性规划,但是,虽然他能以某些简单的体系例示地说明他指望对所有经典数学的复杂得多的体系做的事,他还是没能力对于后者实现其相容性证明,哥德尔指出这是不可避免的,因为在他的著名论文中,他还证明了下列定理,

哥德尔第二定理 对于包含自然数系的任何相容的形式体系F,F的相容性不能在F中被证明

由此得出: 在F的不可判定问题中,F的相容性问题就是其中之一. 这破灭了希尔伯特原来的希望. 现在看来,经典数学的内部相容性证明不能被得到,除非我们采用那样复杂的推理原则,这些原则的内部相容性与经典数学本身的内部相容性一样值得怀疑.

3. 哥德尔的两条定理已经证明,没有哪个重要数学部门能做到完全的公理推演,也没有哪个重要数学部门能保证自己没有

内在矛盾.这些都是公理方法的严酷的局限性,它们表明.数学证明的程序不能,也许也确实不与形式公理的程序相符.对数学家们设计新的证明程序方面的创造发明,不能事先就强加什么限制.显然,人的智慧源泉不能被完全公式化.新的证明原则等待我们发现和发明.所有这些,在数学哲学的任何讨论中已有明显的反响,并且表明.某些广泛流行的数学哲学必定被翻新或废弃.

哥德尔的两条定理肯定是所有数学定理中最 重 要 的 定理之一,正如F.德苏(De Sua)恰当地指出的*,哥德尔的定理表明"被人们认为适合于推导数学的形式体系在下列意义上是不安全的:它们的相容性不能靠该体系内形式化了的有限性方法证明;而任何人认为在此意义上为安全的体系,却不适合于推导数学."再往下看,德苏还说了下列有趣的话:"假定我们不严格地把宗教定义为其基础建立在信仰要素上,而与任何可能提出的理性要素无关的学科,例如,量子力学就是在此定义下的一种宗教,数学也不过是保持独一无二地位的一个神学分支,它要求应被如此归类的事实都有严格的证明".

4. 虽然哥德尔定理的证明[哥德尔本人,或后来由其他人,如B.罗塞(Rosser)和S.C.克林尼(Kleene)给出的),要在这里讲,专业性太强;但是,哥德尔将他的处理"算术化"的异常的方法,还是可以讲.这种方法已被证明是很强有力的,它的用处也是惊人的,就其应用的范围来说,可与笛卡儿在几何学中的硕果累累的方法相媲美.

哥德尔的巧妙方法在于: 为他的原始符号, 他的公式和他的证明指派一个数, 在任何一个完全形式化的系统 F中, 首先是借以表示命题和证明的基本符号, 例如, 在哥德尔的系统 F中, 有符号

 $f, \sim, \langle, \rangle,$

[•] F. De Sua, "Consistency and completeness — a re'sume", American Mathematical Monthly, 63 (1956), pp.295—305.

和可数无穷的变元集合,而变元又分成不同的类型.哥德尔为上述符号分别地指派3,5,11和13,并把

指派给类型n的变元(这里, 17, 19, 23, 29, …是继13之后的相继的素数的序列).我们称这些指派给基本符号的数为哥德尔数.

于是,用F 的符号表示的、F 中的一个命题,不过是F 的基本符号的有限有序序列.这样的序列被称做公式,并且,被指派给每个公式的数是唯一的.令n(1),n(2),…,n(s)为公式P 的符号(依它们出现于P中的次序而定)的哥德尔数,并且,令 P_1 , P_2 ,…, P_1 为从 P_1 =2开始的前S个相继的素数.则被指派给公式P的数(称做P的哥德尔数)是乘积.

$$P_1^{n(1)}P_2^{n(2)}\cdots P_r^{n(r)}$$
.

例如,考虑公式(或公式的部分)

$$\sim (x(fy)),$$

在这里, *和 9分别是类型 2 和 1 的变元, 具有哥德尔数 17 和 17. 此公式的相继的符号的哥德尔数是 5, 11, 289, 11, 3, 17, 13, 13, 因而, 此公式本身的哥德尔数是乘积

$$2^{5}3^{11}5^{289}7^{11}13^{17}17^{13}19^{13}$$
.

由此得出,对于每一个命题或公式,有一个唯一的哥德尔数.还有,给定一个公式的哥德尔数,也能重新得到公式本身.我们所必须做的就是把该公式的哥德尔数分解成唯一的素数因子的乘积.然后,在该因数分解式中出现的2的乘方数是该公式第一个符号的哥德尔数,出现的3的乘方数是该公式第二个符号的哥德尔数,出现的5的乘方数是该公式第三个符号的哥德尔数,等等.

最后,一个证明只不过是有限的、有序的公式序列,给一个证明指派一个哥德尔数的方法,同给一个公式指派一个哥德尔数的方法是一样的。例如,假定一个证明由有序的命题或公式序列 P_1 , P_2 , …, P_i 组成。令f(i)为公式 P_i 的哥德尔数,则此证明的哥德尔数将是乘积

$$P_1^{f(1)} P_2^{f(2)} \cdots P_s^{f(s)},$$

在这里, P_1, P_2, \dots, P_r 是从 $P_1=2$ 开始的前t个相继的素数.和前面说的一样,给定一个证明的哥德尔数,该证明的步骤或相继的公式能用因数分解法重新得到.

哥德尔方法的很有趣和很重要的性质是:它能把元数学陈述(即,关于形式系统F的陈述)"翻译"为关于数的陈述。因为当哥德尔数被指派给F的公式时,则关于这些公式的陈述A能被关于与这些公式相联系的哥德尔数的陈述B所代替,使得:陈述B为真,当且仅当陈述A为真。例如,假定陈述A说:"公式 P_1 是由 P_2 及 P_2 后加的某些符号组成的",对于陈述B,我们就可以说:" P_1 的哥德尔数是 P_2 的哥德尔数的因子。"现在发生了这样的事:一类重要的B陈述,它们自身能被表示为系统F中的公式,这些公式都有自己的哥德尔数;并且,形式系统F在此范围内能"谈论自身"。正是这种把形式系统F的元数学加以算术化的能力才使得哥德尔能证明他的两个重要定理(它们当然是关于他的系统F的元数学陈述)。

在结束本讲之前,让我们给出哥德尔配数法的一个简单应用.我们利用此方法给出所有有理数的集合是可数的这个事实的另一个证明.为此目的,我们先指出:所有有理数能被唯一地写成 $(-1)^n P/q$ (在这里,n,p,q是选得尽可能小的非负整数,并且 $q \neq 0$)的形式.作为例子,我们有

$$-18/60 = (-1)^{1}3/10$$
和 $8/12 = (-1)^{0}2/3$

然后,建立以下对应

$$(-1)^n p/q \longleftrightarrow 2^n 3^p 5^q$$
,

并且称后面的数为有理数 (-1)" p/q 的哥德尔指数,作为一个例子, -3/4的哥德尔指数是 2¹3³5¹=33,750,在有理数和它们的哥德尔指数之间显然存在——对应,这么一来,有理数的枚举通过把有理数按它的哥德尔指数的大小次序进行排列就可得到,

习 题

- 38.1 非范畴公设集能否总是完全的?
- 38.2 用游戏规则证明,在tic-tac-tic游戏(一种类似于五子棋的游戏)中,我们总不会在棋盘上有6个"十字"(cross).
- 38.3 (a) 求公式(fu(fv))的哥德尔数,在这里,U和V分别是具有哥德尔数19和19²、类型为1和2的变元.
 - (b) 求对应于哥德尔数

25311537191113

的公式,

- 38.4 求-12/60和9/36的哥德尔指数.
- 38.5 求哥德尔指数为2250的有理数.

参考文献

KLINE, MORRIS, Mathematics: The Loss of Certainty. New York: Oxford University Press, 1980.

NAGEL, ERNEST, and JAMES R. NEWMAN, Gödel's Proof. New York: New York University Press, 1958.

WILDER, R. L., The Foundations of Mathematics. 2nd ed. New York: Wiley, 1965.

第 39 讲

实现了的梦

大约1812年, C. 巴贝奇 (Babbage, 1792-1871) 这位古怪

的英国数学家和力学家开始考虑造一架机器来帮助计算一些数学表、据说,他的第一个思想火花是在与年轻的赫歇耳(Herschel)一起为天文学会进行的某些计算作核对时产生的.赫歇耳和巴贝奇在冗长的核算过程中发现许多错误,最终使得巴贝奇大声疾呼:"天哪!要是这些计算都是由蒸汽来执行,就好了!"赫歇耳回答:"这很可能".从这次偶然的交谈后巴贝奇就产生了妄想,这些妄想困扰了他后半辈子,把他从一个无忧无虑的年轻人变成一个爱吵架的老头.

1822年,巴贝奇在他给皇家学会会长的信申指出:搞一架会计算航海和天文用表的机器的好处,并且说:他愿为政府造一架这样的机器.他的建议被热情地接受,并且,政府于1823年答应为这个为时三年的事业提供经费.

巴贝奇以很大的热情和于劲投入这一计划.他着手做他所谓的差分机,它能使用二十六位有效数字,并且计算和打出直到六阶的差分.但是,此工作的进展不令人满意.巴贝奇不断地提出关于该机器的新的、宏伟的思想——常常把已经做了的一笔勾销,重新开始。结果是,在大约十年之后,政府撤消了资助.于是,巴贝奇放弃他的差分机,而开始以更大的抱负搞他的分析机,它旨在完全自动地执行一系列算术计算,只要开始由一个算子给它指令.该机器能把中间结果储存于其"记忆"中,以备将来使用,容量为数以千计的五十位数.它能利用辅助数表,如对数表,这些表放在机器的"图书馆"内.它能靠比较数作出自己的判断,然后,按照所作的判断,往下计算.总之构成现代计算机本质的所有功能,都纯机械地实现,而不用象电、真空管、继电系统和晶体管之类的现代工具.不用说,分析机也是永远完不成的,多半由于计划太大,缺少资金,并且技术也没有达到制造必需的精密工具的能力.

英国政府花费了大约 17000 英磅(超过今天的二百万美元)于 差分机的制造, 巴贝奇自己也花费了差不多同样多的钱, 未完成 的差分机和整个机器的图纸,连同分析机的碎片和图纸,被保存于伦敦金斯学院的博物馆中,后来又搬到南肯辛顿科学博物馆,现在还放在那里.展出的分析机的部分仍然能运转得很好,并且,不久以前被拆开、清洗、重装,为了给国际商用机器公司(IBM)的博物馆造一个正好一样的复制品.

虽然巴贝奇的计划失败了,但是它们为最近若干年才有的高速电子计算机提供了启示。巴贝奇超越他的时代达一百年,他所说明的原理是现代计算机原理的基础。英国《自然》杂志于1946年发表一篇讨论美国第一架大型电子计算机(哈佛的继电器计算机,马可1号)的论文时,用的标题是"巴贝奇的梦实现了"。

成功的计算装置的早期历史可很快讲完。作为计算的辅助工具,除了自然赋予人的十指(今天小学生们仍然用它),源于古代的效率高而花费小的算盘(在当今世界的许多地方仍然普遍使用它),和耐普尔1617年设计的计算尺(今天在中学仍作为教学设备使用)外,就数帕斯卡的第一台计算机了。帕斯卡于 1642 年设计了一台加法机帮助他的父亲在鲁昂审核政府账目。这设备能处理不超过六位的数。它包括一系列啮合的号码盘,每一个从 0 标到9,每当一个号码盘从 9 转到 0,系列中的前一个号码盘就自动转一个单位。加法的"进位"程序被机械地完成。帕斯卡造了超过五十台这样的机器,其中有些还保存在巴黎的艺术和技术博物馆中。

稍晚,莱布尼茨1671年于德国,莫兰1673年于英国发明乘法机.还有其他许多人作过类似的尝试,但是,这些机器的大多数被证明是慢的、不实用的.T. 德科尔玛(de Colmar) 虽然不熟悉莱布尼茨的工作,但是他把莱布尼茨型的机器改造成能做减法和除法的机器.这部机器被证明是1875年前造的几乎所有商用机器和1875年以来发展的许多商用机器的原型.1875年,美国人F.S. 鲍德温(Baldwin)获得第一台实用计算机的专利;那台计算机能进行四种基本的算术运算(用不着在机器上作任何重新安

排). 1878年,瑞典人奥德纳获得在设计上同鲍德温相似的一台机器的美国专利. 近代各种各样电动台式计算机〔例如,弗里登(Friden),马钱特(Marchant)和门罗(Monroe)造的〕的基本结构本质上和鲍德温造的一样. 虽然这些台式计算机很重要和有用,但是它们在速度、大小和应用性上,比起今天的大型电子计算机来,都差得远。台式计算机是以帕斯卡 1642 年的加法机为 其原型,而电子计算机是以1830年的巴贝奇的分析机为原型。

巴贝奇的分析机的最初的直接后继者之一是自动程序控制计 算机(Automatic Sequence Controlled Calculator, 即,ASCC);它 被称做马可 1 号计算机,是在哈佛大学教授H. 艾肯(Aiken)的指 导下制造的,于1944 年公之于众,它是按哈佛大学和 IBM 联合 与海军部订的协议办的。该计算机有 51 呎长,8呎高,有两个 6 呎长的配电盘, 5 吨重. ASCC 的改进的第二个模型, 马 可 2 号 计算机,于1948年在弗吉尼亚,达格里海军试验基地开始使用。 巴贝奇的工作的第二个后继者是电子数值积分计算机 (Elenctronic Numerical Integrator and Computer, 即 ENIAC), 这是一种 多用途的电子计算机,是宾夕法尼亚大学根据其与马里兰州的阿 伯丁陆军试验基地的弹道研究试验室订的协议于1945年完成的. 这是第一台用真空管控制的数值计算机。这台计算机 需 要 50 呎 长、30呎宽的机房,包括19000个真空管,有30吨重.现在到华 盛顿的史密斯研究所还能看到,这些惊人高速的计算机,连同类 似的一些工程〔如 IBM 的选择程序电子计算机(SSEC), 宾夕法· 尼亚大学的电子离散变量自动计算机(EDVAC), 普林斯顿高等 研究所的数学分析数字积分计 算 机 (MANIAC),标准局的通用 自动计算机(UNIVAC)和多种微分分析机〕预示取得更大成功的 机器的到来,把计算的程序储存进机器的记忆中的思想,多半是 美国数学家冯・诺伊曼(1903―1957)在二十世纪四十年代发展起 来的,通用自动计算机 I (UNIVAC I)建造于 1951 年,为二十 世纪五十年代成批生产的计算机的最先的一种,计算机制造于是

成了一个工业部门,

每隔几年,新的一代计算机在速度、可靠性和存储量方面都超过前一代。下列的用电子计算机做π的计算的比较表,表明计算机计算速度的迅速增加。

作 者	机器	年 代	十进彻位数	时间
Reitwiesner	ENIAC	1949	2037	70小时
Nicholson 和 Jeenel	NORC	1954	3089	13 分
Felton	Pegasus	1958	10000	33小时
Genuys	IBM 704	1958	10000	100分
Genuys	IBM 704	1959	16167	4.3小时
Shanks 和 Wrench	IBM 7090	1961	100265	8.7小时

大多数早期高速计算机是为了解决军事问题而设计制造的;今天,它们被应用于银行、商业、政府、运输系统、工程等方面.它们已经从奢侈品变成今天社会发展的重要的和必需的工具.由于这个原因,数值分析最近已经受到强烈的刺激,并且此学科的重要性还在与日俱增.在中学讲计算机科学和计算机程序的课程,或在他们自己学校里安装适度的计算机,或与有关单位订协议共同使用安装在附近学院或大学的大型计算机,已经是很普通的事了.巴贝奇的梦确实实现了.

不幸的是,不仅在一般人中就是在年轻的学数学的学生中,也逐渐有了这样一种倾向,认为:从今以后,任何数学问题都要用相当复杂的电于计算机来解决,并且,今天所有的数学活动都转向计算机.数学教师必须与这种计算机病斗争——不断 地 指出:这种机器只不过是非常快、非常高效的符号操作者,并且,它对数学有价值也只在需要操作大量符号的时候,如 在 冗 长 的计算和耗人精力的计数,以及对多种模式和情况进行 试验的 时候.

尽管如此,这类机器在其应用的范围内,还是取得了可观的

数学成就,例如,在第11讲中讲到的,关于亲和数、完全数和素数的最新成就,要是没有计算机的帮助,根本是不可能的,这些机器已被证明,不仅在数论的某些部份有用,而且在象群论,有限几何,图论,矩阵运算,微分方程的数值解和数学游戏等许多领域中也起重要作用,现在略述一二,

例如,在数学游戏的领域中,1958年D. S. 斯考特(Scott)用数学分析数字积分计算机(MANIAC)找出下述问题的全部解:把所有12个五方*摆到一起构成8×8的正方形,其中心有2×2的洞.在操作了3.5小时后,产生65个不同的解(没有哪两个解能由反射和转动彼此互变)的完全的表.类似地,880种不同的4阶正规幻方的列举和构造,用计算机容易得到,并且,设计一个程序解5阶的对应的问题也不难.虽然后者的设计已经做出,但至今没有人在计算机上实现它.估计不同的5阶正规幻方*的个数大约为15,000,000.分一个正方形为没有两个相等的子正方形的困扰人的问题,也已经用计算机成功地处理了,取得了某些结果,只是回避了非计算机过程。

让我们简短地叙述一下用计算机探讨过的两个更探、更重要的数学问题。前面我们已经讲过,用计算机计算π达到很多位小数。D. 香克斯(Shanks)和 J. W. 伦奇在 IBM 7090上计算π达到稍微超过 100,000 位小数,其记录保持五年未被打破。后来,在1966 年 2 月22 日,M. J. 吉劳 (Guilloud)和他的合作者们在巴黎的原子能研究 所 (Commissariat á l'Énergie Atomique) 用一台STRETCH 计算机算出直到 250,000 位小数的π的近似值;一年以后,他们用CDC 6600求π达到 500,000位小数;1974 年又用

^{*&}quot;五方"是五个单位正方形,其边连在一起的,一种平面非列。

^{*} n 阶正规幻方是前端个正整数排人 n×n 方阵,使得其任何一行、任何一列和任何一个主对角线的数有同样的和,的任何一种排列。两个幻方是不同的,如果没有哪个能由反射和转动彼此互变的话。

CDC 7600 求π 达到 1,000,000位小数.

还有把π计算到比这些更多位小数的.一个理由是为了取得涉及π的"正态性"的统计信息.一个实数被说成是简单正态的,如果在其小数展开式中,所有十个数字以相等的频率出现,它被说成是正态的,如果所有同样长的数字块以相等的频率出现.

我们不知道 π (甚至 $\sqrt{2}$) 是否正态的,或,是否简单正态的. 1949 年,开始在 ENIAC 上计算,为的是取得关于这事的统计信息. 根据英国人W. 香克斯1873 年算出的 707 位的错误的 π 值, π 似乎甚至不是简单正态的.

π 的正态性与非正态性的问题当然永远不能用计算机解决。 在这里,我们遇到了一个需要深厚的数学学识而不能单靠计算机 解决的理论问题的例子。这类问题的存在,对于蔓延的计算机病 至少提供部分的解毒剂。

荷兰数学家 L. E. J. 布劳威尔(Brouwer, 1882—1966) 为了逻辑上的和哲学上的目的,找到一个如此之难的数学问题,在此后的十年、二十年内也未必能找到其答案: "在 π 的十进位展 开式中,是否有1000个相继的数字全为 0 ?"如果π是正态的,如同猜疑其有的,则1000个 0 的块绝不只出现一次而是有无限多次,而且是以10¹⁰⁰⁰分之一的平均频率出现。因此证明π是正态的比回答布劳威尔的问题要难得多,而布劳威尔问题本身就是一个相当艰苦的工作。

关于π的费力的计算,除了提供涉及 π 的正态性或非正态性的统计证据外,有另一个用处。每一台新的自动计算机,在投人经常的使用之前,必须用适当的函数试验;并且,编码员和程序设计员必须在新机器上练习工作。核算已经找到了的π 的值,常是实行这种试验和练习的好办法。

为了得到关于 π 的正态性或非正态性的统计信息, 计算机 在求 π 的近似值达到很多位小数时所起的作用, 已经 讲 过 了, 现

在,在即将结束本讲时,简述一下由计算机所取得的也许是最引人入胜的数学成果——1976年夏,解决了著名的"四色问题"。

大约 1850 年, F. 居特里 (Francis Guthrie)* 指出:要区分英国地图上的州(英国的最大的地方行政区域),有四种颜色就够了,当时他是伦敦大学的研究生.稍迟些,他告诉他的弟弟F. 居特里(Fredrick Guthrie)*(当时是德·摩尔根的学生)一个现已丢失的不令人满意的论证.问题的较为确切的表述是:给平面上或球面上的地图上色,有四种颜色就足够了,就能使有共同边界的两个国家有不同的颜色.此猜想自 那以后以四色问题著称.

F. 居特里(Fredrick Guthrie)将这个问题写信告诉他的老师德·摩尔根;他又于1852年10月23日写信告诉W. R. 哈密顿(Hamilton)爵士,并且说,他没能力提出证明.哈密顿对此问题不感兴趣,所以,这问题被搁置一段时间.然后,1878年6月,A. 凯利(Cayley)在伦敦数学会的一次会议上宣布:他未能得到此猜想的一个证明.在《皇家地理学会会刊(1879)》的第一册中,凯利再一次讲这个问题.

在凯利宣布后不久, A. B. 肯普 (Kempe) 这位英国 律师 于 1879 年在《美国数学杂志》上发表了此猜想的一个"证明". 此"证明"的一个简单说明在同一年的迟些时候发表于《伦敦数学 会学报》,并且,在第二年又发表在《自然》杂志上. 1880 年,爱丁堡大学数学教授 P. G. 泰特(Tait)在《爱丁堡皇家学会会刊》上将此问题简化成丁关于一个闭网络的未证明的性质。

^{*} F. 居特里, (Francis Guthrie, 1831—1899)是德·摩尔根早先的学生, 曾在 开普敦南非大学任数学教授,

^{*} F. 居特里 (Fredrick Guthrie, 1833—1866) 后来在肯辛预新创立的理学院 (School of Science)任化学和物理教授。

[≠] A. 德 • 摩尔根 (De Morgen, 1806—1871), 是伦敦大学的教授和伦敦 数 学会的创始人.

P. J. 希伍德 (Heawood)* 1890 年在伦敦《数学季刊》上指出 A. B. 肯普推理中的一个十一年未曾被察觉的缺点. 快一百年了,这个缺点仍然未被克服. 这么长时期以来,四色问题一直是数学中的最著名的未证明的猜想之一. 希伍德的工作并不完全是批判性的, 在一生中, 他对于四色问题的许多方面还做了大量的贡献. 他是第一个证明了用五种颜色给平面或球面上的地图上色肯定是充分的人.

1920年, P. 弗兰克林(Franklin)证明: 少于或等于25个国家在平面或球面上的所有地图可用四种颜色上色. 1926年, C. N. 雷诺兹把这个数目提高到27, 然后, 弗兰克林于1936年把它提高到31. C. E. 温,于1943,把这个数目提高到35. O. 奥尔(Ore)和 J. 斯坦普尔于1968年,把这个数目提高到40.

许多数学家在四色问题上做工作,发现许多种化简方案来限制要被考虑的地图类型,并且找到此猜想的许多引起争论的不同的等价形式,但是,尽管有许多所谓的"证明",这问题本身还是很难驾驭的.研究的日益增长的复杂性导致为高速电子计算机解决此问题编制程序的许多建议.

后来,在1976年夏,伊利诺斯大学的 K. 阿佩尔(Appel)和 W. 哈肯(Haken)以非常复杂的、借助计算机的分析证明了 此猜想. 他们的证明要写好几百页,并且,要用计算机计算超过1000小时. 此证明包含对1936个简化的格局的细审,每一个又需要搜索直到50万个逻辑选择以证明其可化简性. 最后这步工作花了六个月时间,并且,最终完成于1976年6月. 最后必须用计算机核对,花了七月整整一个月,其结果发表于1976年7月26日出版的《美国数学学报公报》.

阿佩尔-哈肯的解无疑是一项惊人的成 就,但是一个基于 2000个情况以及总计达千万次逻辑选择的计算机化的分析,实际

^{*} P. J. 希伍德 (Heawood, 1861—1955), 是一位英国数学家, 也许是在 四 色问题上花费时间最多的一个人。

上谈不上是什么优美的数学,但是解本身是否优美并不是不重要的,它至少应该处于与问题的解同等的地位,这也许就是,当哈肯本人于1976年8月在多伦多大学对几百位数学家的听众讲述上述结果时,只得到不多几声鼓掌的原因,

当然,可能迟早会有人找到四色问题的不依赖任何计算机分析的证明——个足够优美和简明、单靠人的脑子就能证实的证明,尽管如此,人们开始怀疑:数学也许包括超出这种认识之外的问题,即包括单靠人脑根本解决不了而必须用计算机才能解决的很复杂的问题,有足够的理由相信存在这样的问题,从这个观点看,四色问题在数学上的价值比在作图学上的价值大,它能帮助弄清楚单靠人脑解决问题的可能的限制。

三个早期的计算辅助物——算盘、印度—阿拉伯数码和对数的每一个,在本书中,都称做数学史上的里程碑。一百年前巴贝奇预见到的高速电子计算机,作为进一步的计算辅助工具,也享有这样的荣誉。而在计算机的惊人的成就当中,1976年四色猜想的解决本身也是数学史上的一个里程碑。

对于学生、商人和工程师很有用的袖珍计算器,一个用不了50美元;并且,价格在每年下降,功能在每年增加。这些处理8位数,有存储器、能直接进行任何算术运算(有时,包括三角运算)的小计算机,结构能如此紧凑主要是因为利用小晶体管和小晶片取代了早先大机器的电子真空管。它们使计算尺成为废弃的工具。

习 题

39.1 巴贝奇的差分机是为了利用相继的差分造数学表而设计的.为了例示地说明此方法,我们来造一张相继的正整数的平方 1², 2², 3², 4², …的表.我们设置 A, B,C 三列,前两列是操作的列. C列是所求的平方数表, B列是C列的差分表, A列是 B

列的差分表,注意:(在我们的例子中)A 列的所有表值是 2.

$$A \qquad B \qquad C$$

$$2 \rightarrow \qquad 3 \rightarrow \frac{1}{4}$$

$$5 \rightarrow \frac{9}{9}$$

$$2 \rightarrow \qquad \frac{7}{16}$$

我们只要规定三列的初始表值 2 , 3 和 1 ,以及下列固定的以简单加法运算为基础的程序模式 · A 列全填上 2 ,我们想写多少就写多少 · 然后,在 B 列的表值上加上 A 列的表值,如箭头和加横线所示,以完成 B 列 · 最后,以同样方式在 C 列的表值上加上 B 列的表值,以完成 C 列 · 巴贝奇的差分机能自动地进行此模式的运算,因而能造所求的平方表 ·

- (a) 为计算相继的正整数n的 $2n^2-n+1$ 的数值表,确定初始表值.
 - (b) 为计算相继的正整数n的n³的数值表,确定初始表值.
 - 39.2 (a) 有多少不同的"三方"?
 - (b) 有多少不同的"四方"?
 - (c) 构造十二个不同的"五方"的模式,
- (d) 有许多涉及十二个"五方"的引起争论的 难 题. 例 如, 所有十二个五方能被汇集进6×10, 或5×12, 或4×15, 或3×20的矩形. 其一半能被汇集进5×6的矩形, 其另一半能被汇集进另一个5×6的矩形. 我们把这些汇集方法留给有兴趣于此的读者.
- 39.3 (a) 一个幻方的任何列、行或主对角线的数的和,被称做该幻方的幻和. n 阶正规幻方的幻和是什么?

- (b) 证明, 三阶正规幻方的中心数必定是5.
- (c) 证明: 在三阶正规幻方中, 1 永远不能出现在角的位置上.
 - 39.4 (a) 2/7是简单正态的吗?
 - (b) 有理数总能是简单正态的吗?
- 39.5 (a) 构造一个需要用四种颜色着色的四个国家的平面 地图.
- (b) 证明:由平面上的 n 个圆形成的地图能用两 种 颜 色 着 色·

参考文献

GOLDSTINE, H. H., The Computer from Pascal to Von Neumann Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1972.

MORRISON, PHILIP and EMILY, Chartes Babbage and His Calculating Engines (selected writings of Charles Babbage and others). New York: Dover, 1961.

STEEN, L. A., editor, Mathematics Today: Twelve Informal Essays. New York: Springer-Verlag, 1978.

第 40 讲

抱歉和遗憾

在我写的数学史上四十三个里程碑的系列讲座中,有许多优秀的候选者最后不得不忍痛割爱.在最初的系列讲演中选了六十来个里程碑,然而,就是那样,仍然有许多重要的遗漏.我对于不得不作这些删节,颇为抱歉,我对于所选事项的不完全,深感遗憾.在向耐心的读者说再见时,作一点小小的修正:对于每一个构成数学史上惊心动魄的故事,而又被略去的数学史上的里程

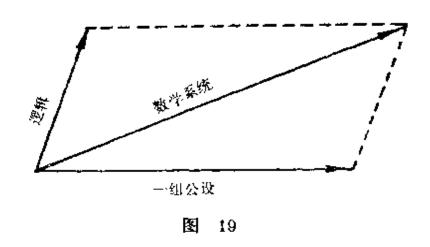
碑,依年代次序说上一两句,看来比较合适。有一些删去的里程碑与跨时代的数学的增长的内容有关,另一些则与跨时代的数学的变化的性质更有关系。前一类,大部分在 H. 伊夫斯 著 的《数学史概论》*中可以找到;后一类,大部分 在 Howard Eves 和 C. V. Newsom 合著的 A Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics (数学基础和基本概念 导论)中可以找到。这两本书均由 Holt, Rinehart and Winston 出版(第一本书有 1982 年的第五版;第二本书的最初版本 是 1965年的),有兴趣于此的读者可以参阅。

* * * * *

- 1. 普林顿322号 (大约在公元前 1900 到1600年之间). 普林顿322号(指哥伦比亚大学的G. A. Plimpton 考古收藏编号322)是已被破译的古代巴比伦数学楔形文字书板中最引起人们兴趣的书板之一。以古代巴比伦的楔形文字书写,是公元前1900到1600年间的东西; 1945年,它最先被 O. 诺伊格包尔(Neugebauer)和 A. J. 萨克斯(Sachs)破译。显然,这是一套 (3 块) 书板中的一块;其余两块还没有找到。普林顿 322 表明。美索不达米亚人远在那么古老的年代在数学上就有了惊人的发展。对数学书板的分析表明,当时已有毕达哥拉斯关系的知识,求所有毕达哥拉斯三元组素数的方法,造三角函数正割表的方法。
- 2. 芝诺悖论(大约公元前 450 年). 我们该假定: 量是无穷可分的; 还是该假定: 它是由无穷多不可分的、极小的部分组成的? 埃利亚哲学家芝诺于公元前五世纪以其想出的四个巧妙的悖论惊人地揭示出; 无论采取哪个假定,都会遇到逻辑上的困难. 这些悖论已经给予数学,尤其是对后来的微积分的发展,以很深的影响.

^{*《}数学史概论》已有中译本,欧阳绛译,1986年,山西人民出版社。

3. 亚里士多德对演绎逻辑的系统化(大约公元前 340 年). 数学系统是一组公设和逻辑两个分力的合力(参看图19). 即,一个数学系统的定理是称做公设的一组原始陈述和为了得到假设的推论所必需的、称做逻辑或程序规则的另一组原始陈述的相互作用的结果. 最先对逻辑作出系统考察的是斯塔盖腊的亚里士多德(公元前384—322年),他曾担任亚历山大大帝的教师,是柏拉图



的弟子,对逻辑的进一步的有意义的研究,直到现代才出现。

- 4. 阿波洛尼乌斯的《圆锥曲线》(大约公元前 225 年). 没有任何别的著作能比佩尔加的大几何学家阿波洛尼乌斯的内容丰富的《圆锥曲线》更能说明古希腊人的几何技巧. 阿波洛尼乌斯在这部著作中给椭圆(ellipse). 抛物线(parabola), 和双曲线(hyperbola)定了名, 并且确定了这些曲线的大量性质(实际上, 他运用了这些曲线的笛卡几方程的等价物). 这为追求数学本身内在的美而没有考虑其实际应用的研究,给出了一个卓越的例子. 在八百多年之后, 开普勒发现这些曲线和这些曲线的性质对于系统而严谨地阐述他的行星运动三定律是必需的.
- 5. 花拉子密的贡献(大约公元 820年). 在马姆哈里发的统治时期(公元809到833年), 学者花拉子密写了一部代数论著和一本算术书. 这些著作也许是所有古代阿拉伯对数学的贡献中影响最大的. 他写的算术书, 在十二世纪被译成拉丁文, 对于在西欧

引进和传播印度-阿拉伯数制起了重要作用.

- 6. 雷琼蒙坦努斯的三角学(大约公元1464年),约翰·米勒(Johann Müller, 1436—1476)以雷琼蒙坦努斯之名 更为 世 人 所 知,这是他的出生地Königsberg(王者之山)的拉丁文形式的读音。他是十五世纪最有才能、最有影响的数学家。《三角全书》(共五册),写于大约1464年,发表于 1533 年,是他的最大的著作,也是在欧洲独立于天文学系统讲述平面和球面三角学的 第一部 著作。虽然在这部书中只用到正弦和余弦,虽然他讲的代数还是修辞代数,中学学生对三角学有兴趣的话,将会在雷琼蒙坦努斯的著作的一些命题中找到乐趣和有意思的内容。
- 7. 斯蒂文和十进制小数(公元1585年). 在辅助计算的五项大发明(算盘,印度-阿拉伯数字系统,十进制小数,对数和现代计算机)中,只有十进制小数未被作为数学史上的里程碑写入本书中. 十进制小数的发明还是应该讲一讲的. 虽然这项发明不能归于任何个人,但是其最早并且最有才能的阐述者是S. 斯蒂文(Stevin 1548—1620),他是十六世纪低地国(包括今天的荷兰、比利时等国)最有影响的数学家,曾担任荷兰军队的军需官和许多公共工程的指挥. 斯蒂文,从若干方面看,是个很有趣的人. 斯蒂文的关于十进制小数的著作发表于1585年,那是标题为《La Thiende》的弗兰芒文版和标题为《La Disme》的法文版.
- 8. 英国代数学派的奠基者哈里奥特(1631年). T. 哈里奥特(Harriot, 1560—1621),美国人对他特别感兴趣,因为他于1585年被W. 腊莱爵士(Raleigh)派到新大陆测量并绘制后来称做弗吉尼亚(Virginie)——现在是北卡罗来纳(North Carolina)——的地图. 他是英国代数学派的著名奠基者. 他在此领域的伟大著作《实用分析术》(Artis analyticae praxis)直到他死后才发表,大部分讲的是方程论. 该著作成为后来的方程论课本的原型. 本世纪初美国每一个学院和大学都开这门课,在今天的数学课程安排中几乎没有它的位置.

- 9. 德沙格和射影几何的诞生(1639年). 1639年在巴黎出版了一本很有独创性但也很古怪的关于圆锥曲线的著作,那是 G. 德沙格(Desargues 1593—大约 1662)写的,当时很少有人注意. 他是一位工程师、建筑师,并曾一度担任法国军官。在二百来年之后,这部著作被法国几何学家和历史学家 M. 夏斯莱(Chasles)挖掘出来,并且自那以后已被认为是综合射影几何早期发展中的第一部经典著作
- 10. 科学院、学会和期刊(1662, 1666). 十七世纪科学和数学活动的激剧增多,以通信来传播发现已经不够了,讨论团体应运而生,随后又出现了定期集会宣读和讨论学术论文的已很像样的学会和科学院. 这些团体中有许多着手出版刊物,让发现在更广的范围内传播. 英国皇家学会1662年创立于伦敦, 法国科学院1666年创立于巴黎. 虽然还有几个较早的小的团体,但这两个团体标志科学院和学会的正式开始. 在1700年之前,只有17种期刊包括数学资料. 数学学会和期刊的后来的历史和发展构成很有趣味并且很振奋人心的故事.
- 11. J. 伯努利和变分法(1696年). J. 伯努利(Bernoulli, 1667—1748)在1696—97年提出并解决最速下降线问题;这指的是:确定在不在同一垂线上两个已知点之间在重力场中运动的有重量的质点的最速下降曲线.在微积分中,我们找产生某极值的点,在这里,我们找产生某极值的曲线.致力于求这第二种极值的数学领域被称做变分法.
- 12. 蓬斯莱和射影几何的黄金时代 (1822年). J. V. 蓬斯莱 (Poncelet, 1788—1867) 这位法国军官,在拿破伦从莫斯科 退 却时当了俘虏。在俄国的两年,他手头上没有书,然而构思了《论图形的射影性质》(Traité des propriétés projectives des figures);这部书在他被释放回到法国后,于1822年发表于巴黎。这部著作对射影几何的研究大有促进,并且开创了这门学科历史上的所谓"黄金时代"。

- 13. 对偶原理 (1826 年). 把射影几何的命题配成对的,平面射影几何的漂亮的对偶原理,是 J. D. 热尔岗纳(Gergonne, 1771—1859)于 1826 年首先明确表述的,虽然在逐期菜和十九世纪前四分之一的其他数学家的著作中已经考虑过,一旦对偶原理以某种方式被证明,一个对偶对的一个命题的证明就自动地把该对偶对的另一个命题错出来了,此后还证明了,在数学的其它领域中也有对偶原理,例如,三角方程,球面三角的几何学,立体射影几何,布尔代数,命题演算和半序集理论,J. 普吕克 (Plücker, 1801—1868)于 1829 年用分析方法证明了对偶原理,当时他发展了一种(线有坐标,点有线性方程的)平面解析几何。
- 14. 超越数(1851, 1873, 1882). 许多学数学的学生从未遇到过某些重大经典成果(比如,代数基本定理, e 和π的超越性,用欧几里得工具三等分任意角、倍立方、和圆变方的不可能性,等等)的证明. 这些成果中有许多能以十分初等的方法证 明. 例如,一位数学系二年级的学生结合超越数能容易领会下列有趣成果的证明.
- ··· (在这里, a, 是从 1 到 9 的任意数字) 是超越数. 〔在 1851 年 首先由 J. 刘维尔 (Liousille, 1809—1882) 证明.〕
- (2) e是超越数. [在 1873 年首先由 C. 埃尔米特 (Hermite, 1822—1901)证明,]
- (3) π 是超越数. 〔在1882 年首先由 F. 林德曼 (Lindemann, 1852—1939)证明.〕
- 15. 希尔伯特问题(1900). D. 希尔伯特 (Hilbert, 1862—1943) 于 1900 年夏被邀请到在巴黎召开的第二届国际数学会上作一次重要的讲演。经过深思熟虑之后,他决定要在这次讲演中洞察数学的未来。为此目的,他选定二十三个内容极为丰富的未解决的问题,他预言,在下一个世纪中数学家们会努力去谋求解

决,而且,它们的解决在数学的未来发展中有划时代的意义.这些问题的讨论和后来求解它们的尝试,在近代数学的历史中占有重要一页.

- 16. 勒贝格积分(1902年). 微积分的基本定理讲的是微分和积分之间的互逆关系, 此关系被证明对于被积函数是连续的都保持. 此基本定理对于更一般的函数也成立, 是 H. 勒贝格(Lebesgue. 1875—1941)在其1902年的博士论文中引进的新的积分理论的重要成果之一; 此新理论又由他在1904年的书中扩展. 由于是对函数值域(而不是定义域)的新奇划分, 许多在黎曼意义上不可积的函数, 在新的勒贝格意义上成为可积的了; 终于使可积函数的范围得到很大扩展. 对于积分的其它的, 进一步推广是以后由当儒瓦(Denjoy)、哈尔(Haar)、斯蒂尔吉斯(Stieltjes)给出的.
- 17. 数理逻辑(1910-1913). 只靠利用日常语言对逻辑作现 代考察,是没有多大希望的工作,想要成功地对此课题作出准确 的、不含糊的处理,符号语言已成为必要的了,由于有这样的符 号,最终处理称为符号逻辑或数理逻辑、虽然莱布尼茨也许是认 真地考虑符号逻辑的需要的第一人,这种思想取得进一步成果该 归功于G. 布尔(Boole), A. 德摩尔根(De Morgan), C. S. 皮尔 斯(Peirce), E. 施履德(Schröder)和G. 弗雷格(Frege)等人; A. N. 怀特黑德 (Whitehead, 1861—1947) 和 B. 罗素 (Russell, 1872 —1970)的名著《数学原理》(Principia mathematica, 1910—1913) 更标志非同寻常的重要的、有影响的成功,此著作的值得注意的 特征是, 它用公设法处理命题演算, 从所有重言式(逻辑定律)中 选定几个作为进一步推演的公设,然后再给定几个形式规则,依 据它们,所有其它重言式可以从选定的这几个得到,这些规则在命 颠演算的推演中的作用与逻辑推理在一个数学分支中的普通推演 中的作用是一样的, 当然, 对逻辑推理不能从传统意义上理解, 因为它是现在构成这个研究对象的逻辑推理:

- 18. 多值逻辑(1921). 因为, 在经典逻辑和《数学原理》的符 号逻辑中,一个命题可假定两个可能的真值(即真或假)的任何一 个. 这些逻辑被称做二值逻辑. 1921年, 卢凯西维奇(J. Lukasiewiez) 在一篇只有两页的短论文中讲述了三值逻辑,在这种逻辑 中,命题《可取三个可能的真值的任何一个.之后不久,波斯特 (E. L. Post)考虑m值逻辑;在这种逻辑中,命题p可取m个可能 的真值的任何一个(在这里, m 是大于1的任何整数), 对m 值逻 辑的其它研究,是1930年由卢凯西维奇和 A. 塔斯 基 (Tarski)给 出的. 然后, 在1932年, m 值真值系统被 H. 赖兴巴赫(Reichenbach)扩展到无限值逻辑;在那种逻辑中,命题 p 可假定无限多 可能的真值的任何一个,这些新逻辑并不是毫无用处的;它们已 被应用于概率的数学理论,现代物理学的量子理论,熟悉的二值 逻辑的公设的独立性的证明,及其它方面. 卢凯西维奇和波斯特 对亚里士多德的著名的排中律(限定一个命题正好有两个真值)的 否认,使我们想起。罗巴切夫斯基和鲍耶对欧几里得平行公理的 否认,以及哈密顿和凯利对乘法交换律的否认。
- 19. 布尔巴基(1939年). 自从1939年开始,一部大部头的、内容丰富的数学著作,署名布尔巴基(Nicolas Bourbaki)于法国问世,它从最一般的基本原理开始,逐步进入各种各样的专门领域. 布尔巴基必定作为本世纪最有影响的数学家之一被载入史册,他的著作被很多人读和引用. 他有热情的支持者和苛刻的批评者. 最奇怪的是,并没有这么个人. 因为布尔巴基是一个非正式的数学家集体所采用的集体笔名. 虽然该组织的成员曾立下不署名的誓言,他们的名字对于数学家们来说,多半是公开的秘密. 人们深信,在最早的成员中有 G. 舍瓦莱(Chevalley)、J. 德萨特(Delsarte)、J. 迪多内(Dieudonné) 和 A. 韦尔(Weil). 成员年复一年地变动,属于该组织的已经有二十来位了.
- 20. 非标准分析(1960)· 十七、十八世纪的微积分包含无穷小量, 无穷小量, 用约翰·伯努利的话说, 是如此之小以致"如

果一个量增加或减少无穷小,则那个量既没有增加又没有减少。" 这看来矛盾的情况与数学家们严谨的直觉相抵触,并且,因此, 无穷小量在数学中被禁用,而代之以8, 8过程和极限理论. 1960 年 A. 鲁滨逊 (Robinson) 成功地处理了无穷小量并在严谨的基础 上应用于微积分. 这项大大简化微积分的成就,既有数学上的价值又有理论上的价值,并且可被证明是本世纪的重要数学成就之一. 它能被用来证明欧拉和其它早期作者的许多的"不严密的"推 理;并且,它能被应用于讲授初等微积分.

部分习题的解法提示

- 21.1 (a) 15:1.
- 21.1 (b) 21:11.
- 21.2 (a) 参看代数课本.
- 21.2 (b) 利用21.2(a).
- 21.2 (c) 利用21.2(a).
- 21.3 (a) 根据二项式定理,所求系数是 $n(n-1)\cdots(n-r+1)/r!$

分子分母均乘以 $(n-r)_1$, 并且利用21.2(a).

- 21.3 (b) 在(a+b)"的二项展开式中,令 a=b=1.
- 21.4 (a) 由本讲正文中给出的算术三角形的定义得出.
- 21.4 (b) 相继地应用21.4(a).
- 21.4 (c) 利用数学归纳法, 21.4(a), 和21.2(a).
- 21.4 (d) 利用21.4(c).
- 21.4 (e) 利用21.4(a).
- 21.4 (f) 利用21.4(e).
- 21.4 (g) 利用21.4(c).
- 22.1 (a) 利用椭圆上的点的焦半径的和为常数这个事实.
- 22.1 (b) 利用双曲线上的点的焦半径的差为常数 这个事

实.

22.2 在这里, 我们有

$$(x-x_2)^2+y^2=(1-x_2)^2+4$$
.

消去》,得

$$(x-x_2)^2+4x=(1-x_2)^2+4$$

戓

$$x^2+2x(2-x_2)+(2x_2-5)=0$$
.

令此二次方程有两个相等的根的条件是其判别式为零,即,

$$(2-x_1)^2-(2x_1-5)=0$$

或 $x_2 = 3$. 于是,可画出所求切线.

- 22.3 把 (x_1, y_1) 点上的切线看作是:过该曲线的 (x_1, y_1) 点及其邻点 $(x_1 + \Delta x_1, y_1 + \Delta y_2)$ 的割线,当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时的极限位置。
 - 22.4 (a) $t = -y^2/x$. A = y/t = -x/y = -3/4.
 - 22.4 (b) 斜率=a/e = -x/y = -3/4.
 - 22.4 (c) 斜率= $\dot{y}/\dot{x}=-x/y=-3/4$.
 - 22.4 (d) 我们有 $y = \sqrt{25 x^2}$,因此

$$dy/dx = -2x/2\sqrt{25-x^2} = -3/4$$
.

- 22.5 参看初等微积分课本.
- 22.6 采用数学归纳法:
- 22.7 ds/dt 是距离的时间变化率; ds^2/dt^2 是 ds/dt 的时间变化率.
- 22.8 在(极大或极小)转向点上,切线是水平的,所以,斜率为零. 此条件不是充分条件,因为,对于 $y=x^3$,在(0,0)点,我们有 dy/dx=0,但是,在此点既没有极大值也没有极小值.
 - 23.1 求立方根的运算。
 - 23.3 $\ln x + C$.
 - 23.4 $-\cos x + C$ $\pi \sin x + C$.
 - 23.5 $\ln(x^2 + 3x + 5) + C$.

23.6

$$d(\tan x)/dx = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)$$

$$= \left[\cos x \frac{d}{dx} (\sin x) - \sin x \frac{d}{dx} (\cos x) \right] / \cos^2 x$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

所以,

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C.$$

23.7
$$d(\tan x - x)/dx = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x$$
, 所以
$$\int \tan^2 x \ dx = \tan x - x + C$$
.

24.1 (a)
$$S = n[2a + (n-1)d]/2$$
.

24.1 (b)
$$S=a(1-r^n)/(1-r)$$
.

24.1 (c) 在习题24.1(b)中的
$$S$$
的公式, \Diamond $n \rightarrow \infty$.

24.2 (a) 在该算术级数中, 令x为最大的部分, d为公差,

24.3 (a) 回忆
$$\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$$
.

24.5 (a)
$$e^{x} = 1 + x + x^{2}/2! + x^{3}/3! + \cdots$$

 $\sin x = x - x^{3}/3! + x^{5}/5! + x^{7}/7! + \cdots$
 $\cos x = 1 - x^{2}/2! + x^{4}/4! - x^{6}/6! + \cdots$

24.5 (c) 在习题24.5(b)中, 取
$$x=\pi$$
、

24.10 0.747.

25.2 只不过是为了方便,令本讲正文中关于 a_n 的公式(2) 对于 n=0 以及 n=1, 2, …均保持. 把

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

在 $-\pi$ 与 $+\pi$ 之间逐项积分,然后,利用习题25.1.

25.3 我们得

잌

$$a_{0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\infty} 2dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} dx = 2 + 1 = 3.$$

$$a_{n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} 2 \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos nx dx$$

$$= \left[\frac{2}{\pi n} \sin nx \right]_{-\pi}^{0} = \left[\frac{1}{\pi n} \sin nx \right]_{0}^{\pi} = 0, \quad n = 1, \quad 2, \quad \cdots.$$

$$b_{n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} 2 \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin nx dx$$

$$= \left[-\frac{2}{\pi n} \cos nx \right]_{-\pi}^{0} + \left[-\frac{1}{\pi n} \cos nx \right]_{0}^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{\pi n} + \frac{2}{\pi n} \cos n\pi - \frac{1}{\pi n} \cos n\pi + \frac{1}{\pi n}$$

$$= \frac{1}{\pi n} (\cos n\pi - 1), \quad n = 1, \quad 2, \quad \cdots.$$

于是,除了a₀以外,所有的a为零;并且,有偶数脚码的b均为零(因为π的偶数倍的余弦是1).我们得

$$b_1 = -\frac{2}{\pi}$$
, $b_3 = -\frac{2}{3\pi}$, $b_5 = -\frac{2}{5\pi}$, ...

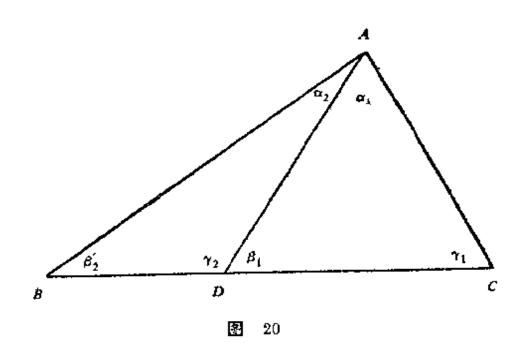
- 25.4 x/2|x|=-1, 对于x<0, 并且, =+1, 对于x>0.
- $25.5 \cos x = 0$ 的正根是 $x = \pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$, … 然后利用本讲正文例 2 中求得的 $\frac{\pi^2}{8}$ 的和式。
 - 25.7 在此傅里叶级数中,令 $x=\pi/2$.
 - 26.1 推导欧几里得第五公设, 令 AB和 CD 被一直线分别

截于 S 和 T, 并且,假定 $\angle BST + \angle DTS < 180^\circ$. 过 S 划直线 QSR,使 得 $\angle RST + \angle DTS = 180^\circ$. 根据 128 (如果两条 直 线 被一条截线所截,使得在截线同侧的一对内角等于两个直角,则 这两条直线平行),QSR平行于CD. 所以,根据普雷菲尔公设,AB与CD不平行,并且,AB与CD 必定相交。根据 117 (一个三角形的任何两角的和小于两个直角),AB和CD不可能相交于ST的不包括 $\angle BST$ 和 $\angle DTS$ 的这一侧。

- 26.3 令 $\triangle ABC$ 为直角三角形,并且,作CD垂直于斜边 AB. 则 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 有两个角彼此相等,因此第三个角必定相等。即, $\angle B = \angle ACD$. 类似地, $\angle A = \angle BCD$. 由此得出。 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^{\circ}$. 于是,如果 $\triangle ABC$ 不是一个直角三角形,就用一高线把它分成两个直角三角形。
- 26.4 用一大圆弧代替直边,在一个球面三角形上作同样的 试验和推理.
- 26.5 此"证明"假定:如果两个三角形有两个角彼此相等,则第三个角也相等。这转而假定非全等相似三角形的存在。
 - 26.6 (a) 作等腰双直角的对角线.
- 26.6 (b) 作等腰双直角的每一"半"的对角线,并且应用习题 26.6(a).
- 26.6 (c) 从该三角形的顶点向该三角形的两边中点联线作 垂线。
- 26.6 (d) 作(从所考虑的两条线射出的)此等腰双直角的靠下的两个"四分之一"的对角线,并且,应用习题 26.6(b).
 - 26.7 (d) 在图20中, 我们有

$$\triangle ABC$$
的亏量= $180^{\circ} - (\alpha_{1} + \alpha_{2} + \beta_{2} + \gamma_{1})$
= $360^{\circ} - (\alpha_{1} + \beta_{1} + \gamma_{1} + \alpha_{2} + \beta_{2} + \gamma_{2})$
= $[180^{\circ} - (\alpha_{1} + \beta_{1} + \gamma_{1})]$
+ $[180^{\circ} - (\alpha_{2} + \beta_{2} + \gamma_{2})]$
= $\triangle ADC$ 的亏量+ $\triangle ABD$ 的亏量

- 26.8 参看习题26.6(b).
- 26.9 ∠A<60°.
- 28.10 参看有关初等立体几何的课本,



27.1 (d) 我们有

"距离"PQ+"距离"QR

$$= \log \frac{(QS)(PT)}{(PS)(QT)} + \log \frac{(RS)(QT)}{(QS)(RT)}$$

$$= \log \frac{(QS)(PT)(RS)(QT)}{(PS)(QT)(QS)(RT)} = \log \frac{(RS)(PT)}{(PS)(RT)}$$

$$= "距离"PR.$$

27.1 (e) 我们有

$$\lim_{Q \to T} \text{"EB"} PQ = \lim_{Q \to T} \log \frac{(QS)(PT)}{(PS)(QT)} = \infty$$

- 27.3 (a) 我们可以把"abba"解释为委员会,"dabba"解释为委员会的成员,并且,假定:正好有两个委员会,并且,没有任何一个委员会成员在多于一个委员会服务.
- 27.3 (b) 我们可以把"dabba"解释为a, b, c三个字母的任何一个, 并且, 把"abba"解释为ab, bc, ca这三对字母的任何一

对.

- 27.4 参看 Wolfe, H. E., Introduction to Non-Euclidean Geometry, pp. 174—176.
 - 28.1 (a) 否.
 - 28.1 (b) 是.
- 28.4 (a) 在第一个等式中以z'代替a, 在第二个等式中以z代替a, 我们得。 $z' \oplus z = z'$, $z \oplus z' = z$. 所以, $z' = z' \oplus z = z \oplus z' = z$.
- 28.4 (b) 在等式 $a \oplus b = a \oplus o$ 的每一成员上加上 \overline{a} ,然后,对使用 \oplus 运算的结合律。
- 28.4 (c) 证明 $x=\overline{a}\oplus b$ 是解, 然后, 根据 28.4(b), 证明, 如果有两个解, x和y, 那么, 我们必定有x=y.
 - 28.4 (d) 根据分配律,
- $(a\otimes a)\oplus (a\otimes z)=a\otimes (a\oplus z)=a\otimes a=(a\otimes a)\oplus z$. 所以,根据28.4(b), $a\otimes z=z$.
- 28.4 (e) 考虑三者的和: $(a \otimes b) \oplus (a \otimes \overline{b}) \oplus (\overline{a} \times \overline{b})$. 先求前二者的和,并且,利用分配律,然后,求后二者的和,并且,利用分配律.
- 28.4 (f) 因为 $a \otimes b = z = a \otimes z$, 我们有:如果 $a \neq z$, 根据 \otimes 法运算的消去律,b = z.
- 28.4 (g) 证明 $x=a^{-1}\otimes b$ 是解,然后,根据 \otimes 法运算的消去律,证明:如果有两个解:x 和 y,则我们必须有 x=y.
 - 28.4 (h) 证明 $(a \otimes b) \oplus (a \otimes \overline{b}) = z$.
- 28.5 (e) 因为 $a \bigcirc b$, $a \oplus \bar{b}$ 是正的. 因为 $b \bigcirc c$, $b \oplus \bar{c}$ 是正的. 所以,根据 P12, $(a \oplus \bar{b}) \oplus (b \oplus \bar{c})$ 是正的. 但是, $(a \oplus \bar{b}) \oplus (b + \bar{c}) = a \oplus \bar{c}$. 因此, $a \oplus \bar{c}$ 是正的,并且, $a \bigcirc c$.
- 28.5 (g) 因为 $a \otimes b$, $a \oplus \overline{b}$ 是正的。因为c已知是正的,根据 P12, $(a \oplus \overline{b}) \otimes c$ 是正的。但是,根据 28.4(h), $(a \oplus \overline{b}) \otimes c =$ $(a \otimes c) \oplus (\overline{b \otimes c})$ 。所以, $(a \otimes c) \otimes (b \otimes c)$ 。

- 28.5 (h) 此来自 28.4(e)和 28.4(h).
- 28.5 (i)利用 28.5(i).
- 28.7 我们有 $a=a\otimes u(根据 P7)=a\otimes (c\otimes c^{-1})$ (根据 P10) = $(a\otimes c)\otimes c^{-1}$ (根据 P4) = $(b\otimes c)\otimes c^{-1}$ (根据 P4) = $b\otimes (c\times c^{-1})$ (根据 P4) = $b\otimes u$ (根据 P10) = b (根据 P7).
 - 28.8 例 (b), (c), (k)是域.
- 29.1 (a) * 既不符合交换律,又不符合结合律; 1 既 符合交换律,又符合结合律;分配律保持.
 - 29.1 (b) 不符合任何一条定律.
 - 29.1 (c) 1符合结合律, 并且保持分配律.
 - 29.1 (d) 只符合两个交换律.
 - 29.3 (b) (1, 0, -2, 3)(1, 1, 2, -2)=(11, -1, 3,
- 3), $\overline{\mathbf{n}}(1, 1, 2, -2)(1, 0, -2, 3) = (11, 3, -3, 1)$.

29.4 (b)

$$AB = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ -8 & 11 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} -8 & -9 \\ 12 & -11 \end{bmatrix}.$$

- 29.4 (e) 没有零因子; 乘法的左消去律.
- 29.5 (a) 证明

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2$$

蕴涵: (1)b(a+d)=1, (2)c(a+d)=0, (3) $a^2+bc=0$, (4) $cb+d^2=0$. 由(1)得出: $a+d\neq 0$. 所以, 由 (2), c=0. 因此, 由 (3)和(2), a=d=0. 这与 $a+d\neq 0$ 矛盾.

- 30.2 (a)是. (b)否. (c)否. (d)否, G1不保持. (e)是.
- 30.5 否.
- 30.10 根据 G2',为我们保证:元素i存在,使得,对于给定的元素 b,b*i=b 然后,令a 为 G 的任何元素。根据 G2',存在元素c,使得: a=c*b 于是,

a*i=(c*b)*i=c*(b*i)=c*b=a, 并且 G2成立. 最

后,根据G2',对G的每个元素 a 存在 G 的一个元素 a^{-1} ,使得: $a*a^{-1}=i$,并且,G3 成立.

- 30.11 否. 令 G 为 $a=a_1x+a_2$, $a_1\neq 0$ 形式的实线性函数的集合,并且,令 a*b意指 a(db/dx)——在这里, db/dx是b 关于x 的导数. 于是, x 是右单位元素, x/a_1 是a 的左逆.
 - 31.1 (a), (b), (e)都是可交换的.
 - 31.2 求乘积 (B-1A-)(AB).
 - 31.3 (b) 围绕原点转180°, 对线的反射.
- 31.4 (a) $C'B' = (ACA^{-1})(ABA^{-1}) = AC(A^{-1}A)BA^{-1} = A(CB)A^{-1}$.
 - 31.4 (b) (ABA-1)-1=AB-1A-1 (根据习题31.2).
- 31.4 (c) $ABA^{-1} = (AB)A^{-1} = (BA)A^{-1} = B(AA^{-1}) = B$, \$\frac{\pi}{2}\$.
 - 31.4 (d) 应用习题 31.4(a) 和 31.4(b).
- 31.5 证明: 任何两个这样的变换的乘积,和任何一个这样的变换的逆,均是这样的变换.
- 31.6 (a) 证明: 任何两个这样的变换的乘积,和任何一个这样的变换的逆,均是这样的变换。
 - 31.6 (b) 在平面罗伦兹变换的表达式中,取 k=1.
- 31.6 (c) 证明: 两个绕(c, d)点的罗伦兹转动和任何一个绕(c, d)点的罗伦兹转动的逆,均是绕(c, d)点的罗伦兹转动。
 - 31.6 (d) 证明: 线 rx+sy+t=0 被带到线 (r/k)x+sky+rc(1-1/k)+sd(1-k)+t=0.
 - 31.6 (e) 参看习题31.6(d).
 - 31.6 (f) 证明: 圆 $(x-c)^2+(y-d)^2=r^2$ 被带到椭圆

$$\frac{(x-c)^2}{k^2r^2} + \frac{(y-d)^2}{r^2/k^2} = 1.$$

31.6 (g) 有顶点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) 的反时针方。 向的三角形的面积被给定为

$$(1/2) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

31.6 (h) 从方程

x=ka+c(1-k), y=(b/k)+d(1-1/k) 中消去k.

- 31.7 (a) 两点间距离的平方:
- 31.7 (b) 从第一条线到第二条线的角的正切:
- 31.7 (c) 从该点到该线的距离:
- 31.7 (d) 该点对该圆的势,
- 31.8 (a) 例如, 证明: RH=D', 而 HR=D.
- 31.8 (b) I, R', H, V, D, D'是自逆的; R和R"互逆.
- 32.1 (a) $(2n-1/2)\pi \angle x \angle (2n+1/2)\pi$, n为任何正整数.
- 32.1 (b) 如 $a\neq 0$, 有一个实数解; 如果a=0 并且 $b\neq 0$, 不存在实数解; 如果 a=0 并且 b=0, 有无穷多实数解.
- 32.2 (a) $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, 当且仅当 a 和 b 不同时是负的.
 - 32.2 (b) $\sqrt{x-y}=i\sqrt{y-x}$, 当且仅当 x-y 是非正的.
 - 32.3 是 -5/2, 非 -2/3.
- 32.4 此定理应读作:"如果两个分数是相等的,并且有相等的非零分子,则它们也有相等的分母."
- 32.5 如果一个不等式的两边被乘以相同的负数,则不等式变换方向, log(1/2)<0.
- 32.6 因为此被积函数在 x=0 处不连续,此积分是非正常的.
 - 32.7 对端点检验其是否极大值(或极小值):
- 32.8 无穷级数的项可任意加括号,当且仅当该级数是绝对 收敛的.

32.9
$$(a, b) = (c, d)$$
, 当且仅当 $a+d=b+c$, $(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d)$, $(a, b)(c, d)=(ac+bd, ad+bc)$.

- 32.10 (a, b) = (c, d), 当且仅当 ad = bc, (a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd), (a, b) (c, d) = (ac, bd).
- 33.1 令 M_1 为AB的中点, M_2 为 M_1B 的中点, M_3 为 M_2B 的中点,等等. 以E代表[AB]上除去 A, B, M_1 , M_2 , M_3 …之外所有点的集合.于是,我们有

[AB] 由 E , A , B , M_1 , M_2 , M_3 , \cdots 合成 ,

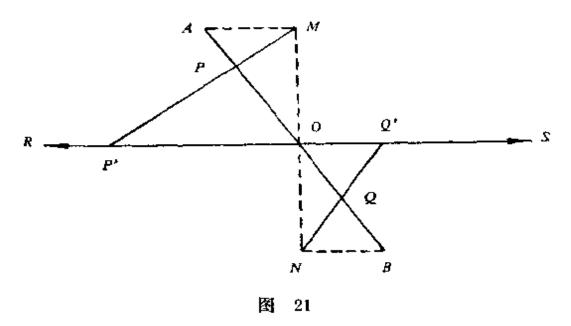
(AB] 由 E, B, M₁, M₂, M₃, ··· 合成,

[AB) 由 E , A , M_1 , M_2 , M_3 , \cdots 合成 ,

(AB) 由 E , M_1 , M_2 , M_3 , ... 合成.

关于我们如何能把这四条线段的任何一条的点与这四条线段的另 外任何一条的点置于一一对应中,也就成为显然的了.

33.2 采用图21.



- 33.3 采用图22.
- 33.4 (c) 这只不过是核验三角形不等式,以 a, b, c 分别

代表d(y, z), d(x, z), d(x, y). 于是,我们有

$$b/(1+b) = 1/(1/b+1) \le 1/[1/(c+a)+1]$$

$$= (c+a)/(1+c+a) = c/(1+c+a)$$

$$+ a/(1+c+a) \le c/(1+c) + a/(1+a).$$

注意: 对于此度量, 所有距离均小于1.

33.5 (b) 这只不过是核验三角形不等式,要注意到:对于 任何三个点(x₁, y₁),(x₂, y₂),(x₃, y₃),我们有

$$|x_3-x_1| \leq |x_2-x_1| + |x_3-x_2|,$$

 $|y_3-y_1| \leq |y_2-y_1| + |y_3-y_2|.$

- 33.7 (b) 公设 H3, 对于点 B和 C不成立.
- 33.8 因为 x 是 S 的极限点, x 的任何邻域 N_x 包括 S 的一个点 y, (在这里, $y_1 \neq x$. 根据公设 H 4,存在 y, 的邻域 N_y , 和 x 的邻域 N_x , 使得 $N_x' \cap N_{y_1} = \phi$. 再则,根据公设 H 2,存在 x 的邻域 N_x' ,使得 $N_x'' \cap (N_x \cap N_x')$. 由此得出 $y_1 \neq N_x''$. 但是,因为 x 是 S 的极限点, N_x'' (并且因此 N_x) 包括 S 的一个点 y, ——在这里, $y_2 \neq x$,并且 $\neq y_1$. 依此方法继续下去,我们得到。 N_x 包括 S 的不同的点 y₁, y₂, y₃…的无穷序列,并且,所想得到的结果被证明。
- 33.10 (b) 令 x 为度量空间M的任何点,并且以 S (x, r) 表示以x为中心有半径r的开球. 然后我们证明: 这些开球 (如果看作邻域的话)满足豪斯多夫空间的四条公设.

我们省去对H1和H2的显然的核验,

为了核验H3, 令 d(x, y) < r, 并且令 R = r - d(x, y) > 0. 于是,三角形不等式陈述为: $d(x, y') \le d(y, y) + d(y, y') = (r - R) + d(y, y') < r$, 如果 d(y, y') < R 的话.即, $S(y, R) \subset S(x, r)$.

为了核验H4, 令 x 与 y 不同并且令 r = d(x, y) > 0. 于是, 易于证明 S(x, r/3)和S(y, r/3)这两个开球没有公共点.

33.11 由M'1和M'2,我们将推导下列两个定理: 定理1 d(x, y) = d(y, x).

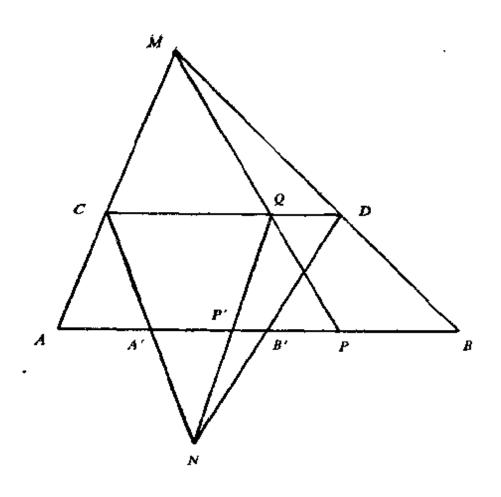


图 22

根据公设 M'2, 我们有

$$d(x, y) \leq d(y, z) + d(z, x)$$

和

$$d(y, x) \leq d(x, w) + d(w, y)$$
.

在第一个不等式中,取 z=x, 在第二个不等式 中,取 w=y, 我们得(回忆公设 M'1)

$$d(x, y) \leq d(y, x), d(y, x) \leq d(x, y).$$

由此得出: d(x, y) = d(y, x).

定理2 d(x, y)≥0.

根据M'2,对于任何点z,

$$d(x, z) \leq d(z, y) + d(y, x)$$
.

取 z=x, 我们有

$$d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x)$$
.

但是 d(x, x) = 0 (根据M'1), 并且d(y, x) = d(x, y) (根据定理 1). 由此得出: $0 \le 2d(x, y)$, 因此, $d(x, y) \ge 0$.

33.12 (g) 参看图23.

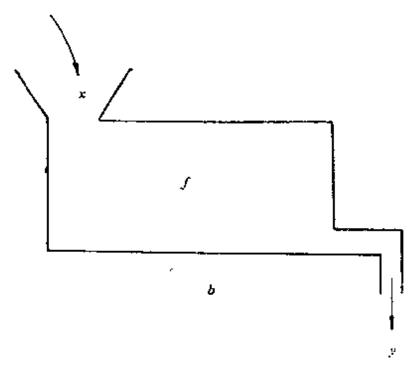


图 23

- 34.1 (b) 利用本讲正文定理 1 的证明中采用的概念.
- 34.1 (c) 利用一个间接的论据,连同 34.1(a) 和本讲正文的定理 1.
- 34.1 (d) 利用一个间接的论据, 连同 34.1(a) 和本讲正文的定理 2.
- 34.5 (a) 过三个有有理坐标的点的圆, 其圆心 有 有 理 坐 标.
- 34.5 (b) 参看American Mathematical Monthly, 56(1949), p. 407. Problem E 832.
- 34.5 (c) 否,因为在直线和圆上有 c 个点,而只有 d 个有理数和 d 个代数数.
 - 34.5 (d) 在给定直线上取一数轴, 在每一个间隔中选一个

有有理坐标的点.这些点是不同的,并且,与间隔一一对应,它们构成所有有理数的可数集合的一个无穷子集.

- 34.5 (e) 把它们放到一个笛卡儿平面上,并且,在每一个 圆内选一个有有理坐标的点,等等.
 - 34.6 (a) 对于有理数a/b, 考虑多项式bx-a.
 - 34.6 (b) 考虑多项式 x2-2.
 - 34.6 (c) 是代数数, 因为它令多项式 x2+1 为零.
- 34.6 (d) 如果 $\pi/2$ 不是超越数,则它是代数数,并且,令某多项式 f(x) 为零.则 π 会使多项式 f(x/2) 为零.
- 34.6 (e) 如果 $\pi+1$ 不 是超越数,则它是代数数,并且,令某多项式 f(x) 为零、则 π 会使多项式 f(x-1)为零、
- 34.6 (f) 如果a是超越数,则a/n和 a+n(a 是自然数) 也是超越数.
 - 34.6 (g) 以 a, 的最小公分母乘该多项式.
- 34.7 $n \longleftrightarrow n+1 \longrightarrow n \to 2n$, 证明 d=d+1. $n \longleftrightarrow 2n$, 和 $n \longleftrightarrow 2n-1$ 均一一对应,证明: d+d=d,或2d=d.
 - 34.8 把有限序列 $\{n_1, n_2, \dots, n_r\}$ 与自然数相结合 $n=2^{n_1}3^{n_2}\cdots p_r^n r$

(在这里, p, 是第 r 个素数). 因为把自然数分解成素数的幂是唯一的, 所以, 在所有非负整数的有限序列的集合与所有自然数的集合之间存在一一对应.

34.9 假定 S 是可数的. 则我们能把 S 的 成 员 排 入 序 列 $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \dots\}$. 考虑阵列

 $f_1(1)$ $f_1(2)$ $f_1(3)$...

 $f_2(1) = f_2(2) = f_1(3) = \cdots$

 $f_3(1)$ $f_3(2)$ $f_3(3)$...

于是,形成函数f(x),使得 $f(n) = f_n(n) + 1$. 然后,f(x)属于S. 但是,f(x)不能排入给定的可数序列,因为它在x = 1时的取值不

同于 $f_1(x)$, 在x=2时的取值不同于 $f_2(x)$, 等等.

- 35.4 (a) 每小时48英里,
- 35.4 (b) 2.4天.
- 35.4 (c) 68分15个,
- 35.4 (d) 67.5分.
- 35.4 (e) 第二件工作.
- 35.4 (f) 第59秒末.
- 35.4 (g) 一笔惊人的薪金.
- 35.4 (h) 11秒.
- 35.4 (i) 5分.
- 35.4 (j) 都不是, 它们一样多?
- 35.4 (k) 最后一堆高于 17,000,000 英里.
- 35.4 (1) 否.
- 35.4 (m) 二分之一,
- 35.4 (n) 是.
- 35.5 原始项是满足公设的任何事物.
- 35.6 否. (a), (b), (c), (d)都不是有效的推理.
- 36.1 因为aGo,存在K中的m使得aFm和mFc,并且,因为bGo,存在K中的n使得bFn和nFc.因为mFc并且 nFc,根据 T6,n=m.因为aFm和bFm,根据 T6,a=b.
 - 36.2 (a) 采用归谬法并分情况讨论.
- 36.7 参看 American Mathematical Monthly, 62 (1955), p. 650上的R. A. Rosenbaum, "Remark on equivalence relations."
- 37.1 假定4是真的,则根据(1), r是假的. 但是,这与(3) 矛盾. 假定4是假的,则根据(2), p是真的. 但是,这与(4)矛盾.
- 37.2 把S的元素解释为所有彼此平行而又没有任何一个的轴与另一个的轴重合的笛卡儿参考标架的集合;并且,令 bFa意

指标架b的原点在标架a的第一象限中。或者,把S的元素解释为所有有序实数对(m, n)的集合,并且,令(u, v)F(m, n)意指u>m并且v>n.

- 37.3 把 K 解释为已知圆上所有点的集合,并且,令 R (abo) 意指"a, b, o 点处于顺时针次序."
- 37.5 把蜜蜂解释为六个人, A, B, C, D, E, F, 把四个蜂群解释为四个委员会: (A, B, C), (A, D, E), (B, F, E), (C, F, D).
- 37.6 令S为一条水平直线上点的集合,并且,令F意指"~在~之右"。
- 37.7 为了证明 P2 的独立性,把蜜蜂和蜂群解释为形成正方形的顶点和边的四颗树和四行树.为了证明 P3 的独立性,把蜜蜂解释为处于一个等边三角形的顶点和其一高的垂足上的四颗树,把蜂群解释为沿着该三角形的边和高的四行 树.为了证明P3 的独立性,把蜜蜂和蜂群解释为一个三角形的顶点和边的三颗树和三行树.
- 37.8 下列三条定理可由习题37.5的公设推导出来。(1)正好有六只蜜蜂;(2)每个蜂群中正好有三只蜜蜂;(3)对于每一只蜜蜂正好有一只蜜蜂和它不在一个蜂群。把这些定理置入视野,让我们把四个蜂群分别标以工,工,工,又,把蜂群工中的蜜蜂标以A,B,C.令蜂群工有蜜蜂A,并且只有A是与蜂群工共有的.然后,我们可以用A,D,E表示蜂群工的蜜蜂。于是,令B为蜂群 国和蜂群 I 共有的蜜蜂、然后,我们可以或用B,D,F或用B,E,F表示蜂群 II 的蜜蜂、在第一种情况下,蜂群以必定包括蜜蜂C,D,F.于是,有下列两种表示蜂群和蜜蜂的办法:

I
$$A$$
, B , C I A , B , C II A , D , E II A , D , E II B , D , F II B , E , F

事实上,把第一种表示法中的D换成E, E换成D, 就成了第二种表示法,于是,由此得出,此公设集的任何一种解释都可以用第一种表示法标出,并且,想得到的同构被证明。

- 37.9 证明, 标示K的四个元素的方法实质上只有一种.
- 37.10 参看Americam Mathematical Monthly 62 (1955), pp. 179—180上的W. T. Guy, Jr., "On equivalence relations."
 - 38.1 否.
- 38.2 因为"0"(nought)和"+"(cross)被更替 地 填 入 棋 盘中,并且,因为"0"和"+"的总的可能的数是 9, 所以,在任何时候,在棋盘上也不会出现多于 5个"+"。
 - 38.3 (a) $2^{11} 3^3 5^{19} 7^{11} 11^3 13^{261} 17^{13} 19^{13}$
 - 38.3 (b) $\sim (fu)$.
 - 38.4 18,750.
 - 38.5 2/3.
 - 39.1 (a) 初始列表值为4,5,2.
 - 39.1 (b) 初始列表值为6, 12, 7, 1.
 - 39.2 (a) 两个.
 - 39.2 (b) 四个.
 - 39.3 (a) $n(n^2+1)/2$.
- 39.3 (b) 以字母表示幻方中的数,然后,把中间那行,中间那列和两条主对角线上的字母加到一起,
 - 39.3 (c) 利用39.3(b)和一个间接的论据。
 - 39.4 (a) 否.
 - 39.4 (b) 是. 例如,r=0.1234567890.
 - 39.5 (b) 采用数学归纳法,

事实上,把第一种表示法中的D换成E,E换成D,就成了第二种表示法,于是,由此得出,此公设集的任何一种解释都可以用第一种表示法标出,并且,想得到的同构被证明。

- 37.9 证明, 标示K的四个元素的方法实质上只有一种.
- 37.10 参看Americam Mathematical Monthly 62 (1955), pp. 179—180上的W. T. Guy, Jr., "On equivalence relations."
 - 38.1 否.
- 38.2 因为"0"(nought)和"+"(cross)被更替 地 填 入 棋 盘 中,并且,因为"0"和"+"的总的可能的数是 9,所以,在任何时候,在棋盘上也不会出现多于 5个"+"。
 - 38.3 (a) $2^{11} 3^3 5^{19} 7^{11} 11^3 13^{261} 17^{13} 19^{13}$
 - 38.3 (b) $\sim (fu)$.
 - 38.4 18,750.
 - 38.5 2/3.
 - 39.1 (a) 初始列表值为4,5,2.
 - 39.1 (b) 初始列表值为6, 12, 7, 1.
 - 39.2 (a) 两个.
 - 39.2 (b) 四个.
 - 39.3 (a) $n(n^2+1)/2$.
- 39.3 (b) 以字母表示幻方中的数,然后,把中间那行,中间那列和两条主对角线上的字母加到一起.
 - 39.3 (c) 利用39.3(b)和一个间接的论据.
 - 39.4 (a) 否.
 - 39.4 (b) 是.例如, r=0.1234567890.
 - 39.5 (b) 采用数学归纳法,